فصل ۱

الگو و دنباله

مفهوم دنباله

آیا می‌دانید که قاره‌ها ابتدا به هم پیوسته بوده‌اند و یک قاره‌ی بزرگ را تشکیل می‌دادند. در طول زمان با حرکت قسمت‌هایی از این خشکی بزرگ، قاره‌ها به وجود آمدند. براساس نظریه‌ی یکی از دانشمندان میزان حرکت قاره‌ها در هر ۱ میلیون سال حدوداً ۱۹ کیلومتر و ۲۰۰ متر می‌باشد. آیا به این موضوع فکر کرده‌اید که ممکن است قاره‌ها دوباره به هم بپیوندند؟

فعالیت

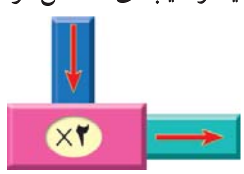
فرض کنیم قاره‌ها در هرسال حدود۲ سانتی‌متر حرکت می‌کنند. می‌خواهیم حرکت قاره‌ها را از سال ۱۳۸۸ بررسی کنیم. جدول زیر میزان حرکت قاره‌ها را در ۷ سال آینده نشان می‌دهد :

عدد سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم
میزان حرکت قاره‌ها بر حسب سانتی‌متر	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴

۱- جدول فوق را تا پایان سال دهم تکمیل کنید.

۲- در پایان چه سالی قاره‌ها به اندازه ۴۰ سانتی‌متر حرکت می‌کنند؟

۳- اعداد ۷ ، ۶ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ و ۱ را در داخل ماشین زیر قرار دهید و اعداد به دست آمده را با اعداد سطر دوم مقایسه کنید و نتیجه‌ی حاصل از مقایسه را بنویسید.



۴- نمودار جدول بالا را رسم کنید.

۵- اگر بخواهیم بعد از یک میلیون سال میزان حرکت قاره‌ها را به دست آوریم چه راه حلی را پیشنهاد می‌کنید؟

میزان حرکت قاره‌ها الگویی دارد که با استفاده از آن می‌توانیم میزان حرکت قاره‌ها را در سال‌های مختلف برآورد کنیم. نگاه آگاهانه و دقیق و یافتن الگوهای مهارتی مهم است که توجه به آن، برای حل مسئله و به طور کلی کشف ایده‌های ریاضی در پدیده‌های واقعی ضرورت دارد. در روند پیدا کردن یک الگو، سازماندهی و تنظیم داده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در مثال حرکت قاره‌ها اگر عدد هر سال را با نماد n ومیزان حرکت قاره‌ها را با نماد a_n نمایش دهیم اطلاعات مربوط به این مثال را به شکل زیر می‌توانیم نمایش دهیم :

میزان حرکت قاره ها بر حسب سانتی متر	عدد سال
$a_۱ = ۲ \times ۱$	۱
$a_۲ = ۲ \times ۲$	۲
$a_۳ = ۲ \times ۳$	۳
...	...
...	...
...	...
$a_n = ۲ \times n$	n

با توجه به جدول بالا می‌بینیم که میزان حرکت قاره‌ها پس از n سال ۲nسانتی‌متر می‌باشد.

۲nسانتی‌متر = میزان حرکت قاره‌ها پس ازn سال

به عبارت دیگر $a_n = ۲n$. با استفاده از این تساوی می‌توانیم میزان حرکت قاره‌ها را در سال‌های دیگر هم محاسبه کنیم.

اگر میزان حرکت قاره‌ها را در سال‌های متوالی پشت سرهم بنویسیم دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود.

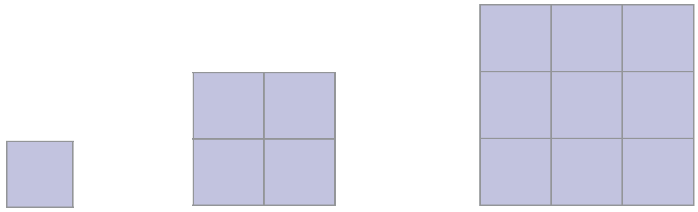
۲و ۴ و۶ و۸ و ... و ۲n و ...

اولین عدد در این دنباله، ۲ است و آن را جمله‌ی اول این دنباله می‌نامند. جملات بعدی این دنباله‌ی اعداد ۴ , ۶ , ۸ , ... هستند. nامین جمله این دنباله عدد ۲n است.

در فعالیت زیر دنباله‌ی دیگری از اعداد را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

با توجه به تغییرات شکل زیر در هر مرحله :



شماره‌ی ۱ شماره‌ی ۲ شماره‌ی ۳

۱- جدولی تشکیل دهید که تعداد مربعات کوچک در شکل را بتوان تا شکل شماره‌ی ۶ از روی آن پیدا کرد.

۲- رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد مربعات کوچک را حدس بزنید.

۳- تعداد مربعات کوچک در شکل‌ها را با فاصله پشت سر هم بنویسید.

۴- قانونی که الگوی بالا از آن پیروی می‌کند را به‌دست آورید و دلیل درستی آن را توضیح دهید.

۵- با استفاده از الگوی به دست آمده سی‌امین عدد را پیدا کنید.

در فعالیت بالا اگر اعداد به دست آمده در هر مرحله را پشت سرهم بنویسیم، دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود.

۱و ۴و ۹و ... و n^2 و ...

جمله‌ی اول این دنباله عدد ۱ و جمله‌ی دوم آن عدد ۴ و جمله nام آن n^2 است.

هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌نامند.
به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است یک جمله‌ی آن دنباله گفته می شود.
جمله‌ی nام دنباله را که n یک عدد طبیعی دلخواه است، جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند.

در برخی از دنباله‌ها الگویی وجود دارد که بر اساس آن می‌توانیم جملات آن دنباله را تعیین کنیم.

مثال

... و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ یک دنباله است که از اعداد زوج متوالی ساخته شده است.اگر جمله‌ی اول این دنباله را با $a_۱$ و جمله‌ی دوم را با $a_۲$ و به همین ترتیب جمله‌ی nام این دنباله را با a_n نشان دهیم داریم :

$a_۱ = ۲ \,,\, a_۲ = ۴ \,,\, a_۳ = ۶ \,,\, a_۴ = ۸ \,,\dots,\, a_n = ۲n$

تمرین در کلاس

۱- ابتدا سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را پیدا کنید، سپس جمله‌ی nام آن را بنویسید.

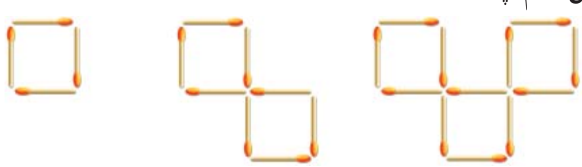
الف) ..., ۱۷, ۱۲, ۷, ۲

ب) $\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۴} , ۱ , ۱\frac{۱}{۴} , ۱\frac{۱}{۲} , \dots$

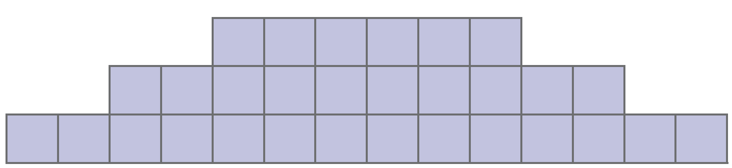
۲- با استفاده از چوب کبریت سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت‌های به کاررفته در شکل nام چند تا است؟

مسائل

۱- با استفاده از چوب کبریت‌ها سه شکل زیر ساخته شده است.تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل nام چند تا است؟



۲- شکل زیر سه ردیف از تعداد صندلی‌های یک سالن تئاتر را نشان می‌دهد.اگر تعداد صندلی‌های ردیف‌های بعدی از الگوی افزایش صندلی‌های این سه ردیف پیروی کنند تعداد صندلی‌ها را تا ردیف هفتم به‌دست آورید :



۳- اگر جمله‌ی nام دنباله‌ی $a_n = ۳n$ باشد، با تشکیل جدول چهار جمله‌ی اول آن را بنویسید.

۴- اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، تعداد مستطیل‌های به‌دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

۵- چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر که جمله‌ی عمومی آن داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ ب) $a_n = ۳n^۲ - \frac{۱}{n}$ ج) $a_n = ۲^n - n^۲$

۶- در زیر چهار دنباله و چهار جمله‌ی عمومی دنباله آمده است.معین کنید که هر جمله‌ی عمومی مربوط به کدام دنباله است:

$\frac{۲n}{n+۱}$	$۳,۵,۷,...$
$(-۳)^n$	$۱,\frac{۴}{۳},\frac{۳}{۲},...$
$n^۲+۵n$	$۱,-۳,۹,...$
$۲n+۱$	$۶,۱۴,۲۴,...$

۷- رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می‌گیرد و در یک صندوق می‌گذارد. رضا تا آخر هر هفته نیمی از پول صندوق را خرج می‌کند. اگر در اولین هفته، پولی در صندوق نبوده باشد، رضا در پایان هفته‌ی اول چه‌قدر پول در صندوق دارد؟ در پایان هفته‌ی دوم چه‌قدر پول در صندوق دارد؟ در پایان هفته‌ی سوم چه‌قدر پول در صندوق دارد؟ پول‌های رضا در پایان هر هفته را به صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله‌ی nام و جمله‌ی n+۱ام این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟

دنباله‌ی حسابی

یکی از بازیکنان فوتبال در هنگام بازی صدمه می‌بیند و مجبور می‌شود زانوی پای خود را عمل کند. بعد از عمل، پزشک معالج به او پیشنهاد می‌کند در هفته‌ی اول روزی ۱۲ دقیقه بدود و هر هفته به زمان دویدن ۳ دقیقه اضافه کند. اگر میزان دویدن این بازیکن به ۱۳۸ دقیقه در روز برسد او می‌تواند برای تیم بازی کند.

رضا که از علاقه‌مندان این بازیکن می‌باشد می‌خواهد بداند که بعد از چند هفته او می‌تواند برای تیم بازی کند. رضا جدولی به صورت زیر تشکیل داد تا بتواند قانون حاکم بر الگوی جدول را به‌دست آورد و از این طریق بفهمد که بازیکن مورد علاقه‌اش بعد از چند هفته می‌تواند برای تیم بازی کند. او تعداد هفته‌ها را با n و میزان دویدن در هفته‌ی nام را با a_n نشان داده است.

تعداد هفته‌ها	۱	۲	۳	۴
زمان دویدن	$a_1 = ۱۲$	$a_2 = ۱۲ + ۳ = ۱۵$	$a_3 = ۱۵ + ۳ = ۱۸$	$a_4 = ۱۸ + ۳ = ۲۱$

فعالیت

۱- به رضا کمک کنید تا جدول را برای هفت هفته کامل کند.

۲- چه رابطه‌ای بین زمان دویدن در هر دو هفته‌ی متوالی وجود دارد؟

۳- جمله‌ی nام را بر حسب جمله‌ی اول و n بنویسید.

۴- با به‌دست آوردن قانون حاکم بر الگوی فوق بگویید که این بازیکن بعد از طی چند هفته می‌تواند بازی کند؟

۵- اگراین بازیکن هر هفته ۶ دقیقه مدت زمان دویدن خود را افزایش می‌داد بعد از طی چه مدتی می‌توانست بازی کند؟

در فعالیت بالا با تشکیل دنباله‌ی نشان دهنده‌ی میزان دویدن این بازیکن در هر هفته دیده می‌شود که میزان افزایش بین هر دوجمله‌ی متوالی مقداری ثابت است.

دنباله هایی که هرجمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید دنباله‌ی حسابی می نامیم و به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله گفته می شود.

اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی عدد a و قدر نسبت این دنباله عدد d باشد جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود.

$$a \text{ و } a+d \text{ و } a+2d \text{ و } \dots \text{ و } a+(n-1)d \text{ و } \dots$$

جمله‌ی nام این دنباله $a+(n-1)d$ است.

در فعالیت قبلی، دنباله‌ی به‌دست آمده یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ است.

مثال

۱- ماشینی با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند و در حال دور شدن از شهر کرمان است. این ماشین در شروع حرکت ۱۵ کیلومتر با کرمان فاصله دارد. اگر فاصله‌ی این ماشین تا شهر کرمان را در پایان ساعت اول و دوم و سوم و چهارم بنویسیم دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل می‌شود :

۸۵, ۱۵۵, ۲۲۵, ۲۹۵

این دنباله یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۸۵ و قدر نسبت ۷۰ است .

۲- شمعی ۲۵ سانتی‌متری را روشن کرده‌ایم . این شمع در هر دقیقه ۲ میلی‌متر کوتاه می‌شود. طول این شمع با گذشت زمان پس از هر دقیقه که می‌گذرد یک دنباله از اعداد به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

۲۵ , ۲۴/۸ , ۲۴/۶ , ۲۴/۴ , ...

این یک دنباله‌ی حسابی است و هر جمله از این دنباله با اضافه کردن عدد ۰/۲- , به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید .پس این یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۲۵ و قدر نسبت ۰/۲- است.

در دنباله‌ی حسابی ، اگر قدرنسبت، مثبت باشد ، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

مثال

۱- ... و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم : $a=۲$ و $d=۳$ جملات این دنباله در حال افزایش هستند و جمله‌ی nام این دنباله عبارت است از :

$$a_n = ۲ + ۳(n-۱) = ۳n - ۱$$

۲- $..., -۱, -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, ۱$ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم : $a=۱$ و $d=-\frac{۱}{۲}$. جملات این دنباله در حال کاهش هستند و جمله‌ی nام این دنباله عبارت است از :

$$a_n = ۱ + (-\frac{۱}{۲}) \times (n-۱) = ۱ - \frac{n}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} - \frac{n}{۲}$$

تمرین در کلاس

شیر آبی در هر دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد یک حوض می‌کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک ، دو ، سه ، چهار و پنج دقیقه در یک دنباله بنویسید . آیا این یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب این حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

مسائل

۱- ابتدا بررسی کنید که آیا هر یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند یا خیر و به چه دلیل؟ سپس الگوی ساختن دنباله را پیدا کنید.

الف) $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots$ ب) $-۱۵, -۱۸, -۲۱, -۲۴$

ج) $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۶}, \ldots$ د) $۰, \sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \ldots$

۲- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱۰و۳ باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۳- نشان دهید برای آن‌که یک دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n, \ldots$ دنباله‌ی حسابی باشد، باید $a_n - a_{n-۱}$ عدد ثابتی باشد. این مقدار ثابت چه عددی را نشان می‌دهد؟

۴- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا $n+\frac{۱}{۲}-$ قانون دنباله‌ی $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۵}{۶}, \ldots$ می‌باشد؟ دلیل خود را بیان کنید.

۵- اگر در جملات یک دنباله‌ی حسابی اول عدد $\frac{۱}{۳}$ و بعد $\frac{۱}{۴}$ قرار گرفته باشند، جمله‌ی قبل از $\frac{۱}{۳}$ را بنویسید.

۶- اگر xوyوz به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند نشان دهید:

$$y = \frac{۱}{۲}(x+z)$$

۷- اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱۷ و جمله‌ی دوازدهم آن ۵۲ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

۸- دنباله‌ی زیر به ازای چه مقداری از x ، یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود :

$۱-x$, $۲+x$, $۱+۲x$

۹- نشان دهید که اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

۱۰- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث ۶۰ درجه است.

۱۱- مثلث قائم الزاویه‌ای ارائه کنید که طول ضلع کوچک آن ۱ باشد و اگر طول اضلاع آن را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. اگر طول ضلع کوچک این مثلث a باشد، طول بقیه‌ی اضلاع را بر حسب a حساب کنید.

دنباله‌ی هندسی

یکی از بازی‌های دوران کودکی به هوا انداختن توپ سرخ و سفید و آبی بود که در آن بارها شاهد به زمین خوردن توپ و دوباره به هوا رفتن آن بوده‌ایم و احتمالاً تعداد دفعات زمین خوردن و به هوا رفتن توپ برایمان جالب بوده است. اکنون که بزرگ‌تر شده‌ایم، می‌توانیم با توصیف ریاضی این بالا و پایین رفتن‌های توپ درک عمیق‌تری از آن به‌دست آوریم.

فعالیت

توپی در اختیار داریم که هرگاه آن را از ارتفاعی به زمین رها کنیم در برخورد با زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و در هر برگشت به بالا به ۶۰ درصد ارتفاع قبلی خود بر می‌گردد.

۱- این توپ را از ارتفاع ۲۵ متری رها می‌کنیم. میزان ارتفاعی که توپ پس از اولین و دومین و سومین برخورد با زمین به بالا می‌آید را بنویسید.

۲- هر جمله‌ی این دنباله با جمله‌ی قبلی چه رابطه‌ای دارد؟

۳- پس از n برخورد با زمین، توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۴- آیا این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است؟

دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک عدد ثابت در جمله‌ی قبلی به دست می‌آیند، دنباله‌ی هندسی می‌نامند.

مثال

هر کدام از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی هستند. در هر کدام از آن‌ها هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب عددی معین در جمله‌ی قبلی ساخته شده است.

الف) $۳ , ۶ , ۱۲ , ۲۴ , ۴۸$

ب) $۱ , \sqrt{۵} , ۵ , ۵\sqrt{۵} , ۲۵$

ج) $۲ , \frac{۲}{۳} , \frac{۲}{۹} , \frac{۲}{۲۷}$

د) $۱ , -۱ , ۱ , -۱$

دنباله‌های ثابت دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت ۱ هستند.

تمرین در کلاس

۱- وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، منظور آن است که جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل، افزایش می‌یابد. فرض کنید یک کشور ۵۰ میلیون نفر جمعیت دارد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد است.

الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) جمعیت این کشور را در سال‌های اول تا پنجم بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

ج) آیا این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است؟ آیا این دنباله یک دنباله‌ی هندسی است؟

د) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چه‌قدر خواهد بود؟

۲- کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله‌های هندسی هستند؟ دلیل خود را ارائه کنید.

الف) $۵ , ۵ , ۵ , ۵ , ۵ , \ldots$

ب) $-۱ , ۲ , -۴ , ۸ , -۱۶ , \ldots$

ج) $۲ , ۴ , ۶ , ۸ , \ldots$

د) $۱-\pi , ۱-\pi^{۲} , (۱-\pi^{۲})(۱+\pi) , \ldots$

در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک عدد ثابت مانند q در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. q را قدر نسبت این دنباله می نامند. اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی عدد a و قدر نسبت آن عدد q باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود.

$$a\ ,\ aq\ ,\ aq^{۲},\ aq^{۳},\ \dots\ ,\ aq^{n-۱},\ \dots.$$

جمله‌ی nام این دنباله $aq^{n-۱}$ است. ($aq^{n-۱}$ در مکان nام قرار دارد)

مسائل

۱- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۵ و جمله‌ی بعدی آن ۱− ، باشد، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۲- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی ۴ باشد، جمله‌ی قبل از ۳ را بنویسید.

۳- اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی اول عدد ناصفر a و بعد عدد ناصفر b باشد، جمله‌ی بعد از b چه خواهد بود؟

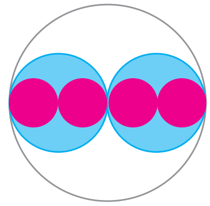
۴- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند نشان دهید : $y^{۲} = xz$.

۵- اگر جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی هندسی ۱ و جمله‌ی هفتم آن ۸ باشد جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

۶- در دنباله‌ی زیر عدد x را طوری تعیین کنید تا این دنباله یک دنباله‌ی هندسی شود. مسئله چند جواب دارد؟

$$۱-x\ ,\ x\ ,\ ۱+x$$

۷- اگر مساحت یک دایره برابر $S_۱$ و داخل آن دو دایره به شکل زیر رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را $S_۲$ بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_۱, S_۲, \dots, S_n, \dots$ ساخته می‌شود.



جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید و نشان دهید این یک دنباله‌ی هندسی است.

۸- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب کنیم نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.
۹- اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.
۱۰- آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنباله‌ی هندسی باشد و هم یک دنباله‌ی عددی؟

۱۱- اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_1\, a_3 = 4$ و $a_3\, a_5 = 16$ جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد

دنباله‌های حسابی و هندسی دسته‌ی خاصی از دنباله‌ها هستند. در حالت کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. برخی دنباله‌ها به گونه‌ای هستند که اگر به جملات آن‌ها نگاه کنیم متوجه می‌شویم که این جملات به عدد خاصی نزدیک می‌شوند.

فعالیت

۱- در تقسیم ۱ بر ۳ خارج قسمت را تا ۱ رقم اعشار و ۲ رقم اعشار و ۳ رقم اعشار و ۴ رقم اعشار به دست آورید.
۲- خارج قسمت تقسیم‌های فوق را در یک دنباله بنویسید.

۳- چه الگویی در جملات این دنباله وجود دارد؟ جمله‌ی ششم این دنباله چیست؟

۴- تفاضل شش جمله‌ی اول این دنباله را از $\frac{1}{3}$ حساب کنید و دنباله‌ی این تفاضل‌ها را تشکیل دهید .
۵- چه الگویی در جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها مشاهده می‌کنید؟ جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟
۶- جملات دنباله‌ی اصلی از خارج قسمت‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل، به صفر نزدیک شوند گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می شوند.

مثال

با تقسیم ۲ بر ۳، در هر مرحله که خارج قسمت را حساب کنیم دنباله‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$0/6\ ,\ 0/66\ ,\ 0/666\ ,\ \ldots\ ,\ 0/6\ldots6\ ,\ \ldots.$$

تفاضل جملات این دنباله از $\frac{2}{3}$ به شکل زیر است.

$$\frac{2}{3}-0/66=\frac{2}{3}-\frac{66}{100}=\frac{200-198}{300}=\frac{2}{300}\quad,\quad \frac{2}{3}-0/6=\frac{2}{3}-\frac{6}{10}=\frac{20-18}{30}=\frac{2}{30}$$

$$\frac{2}{3}-0/6666=\frac{2-3\times0/6666}{3}=\frac{0/0002}{3}\quad,\quad \frac{2}{3}-0/666=\frac{2-1/998}{3}=\frac{0/002}{3}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{6666}{10000}=\frac{20000-6666}{30000}=\frac{2}{30000}\quad,\quad \frac{2}{3}-\frac{666}{1000}=\frac{2}{3000}$$

دنباله‌ی تفاضل به شکل زیر است.

$$\frac{0/2}{3}\ ,\ \frac{0/02}{3}\ ,\ \frac{0/002}{3}\ ,\ \frac{0/0002}{3}\ ,\ \ldots.$$

همان طور که دیده می‌شود جملات دنباله‌ی تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس جملات خود دنباله به $\frac{2}{3}$ نزدیک می‌شوند.

مثال

جملات یک دنباله‌ی ثابت مانند : $a\,,a\,,a\,,\ldots a\,,\ldots$ به همان مقدار ثابت دنباله نزدیک می‌شوند.

در این حالت خاص، جملات دنباله دقیقاً برابر همان عددی هستند که به آن نزدیک می‌شوند.

تمرین در کلاس

با تقسیم ۱ بر ۹ خارج قسمت‌های به‌دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

در بخش قبل دیدیم که برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توانیم با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به‌دست می‌آیند دنباله‌ای از اعداد اعشاری می‌توان ساخت که جملات آن به عدد گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند. در فعالیت زیر خواهیم دیدکه چگونه می‌توانیم

برای هر عدد حقیقی(گویا یا گنگ)، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آوریم که جملات آن رفته رفته به آن عدد نزدیک می‌شوند.

فعالیت

فرض کنید x عددی بین ۰ و ۱ باشد. مثلاً : $x = \frac{۳}{۷}$ ، شما عدد دیگری را در نظر بگیرید.

۱- روی محور اعداد، فاصله‌ی بین نقاط متناظر ۰ و ۱ را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟ برای عدد $\frac{۳}{۷}$ داریم : $۰/۵ > \frac{۳}{۷} > ۰/۴$.

۲- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟

در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این عدد بین ۰/۴ و ۰/۵ بوده است و پس از رسم بزرگ‌تر این فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم : $۰/۴۳ > \frac{۳}{۷} > ۰/۴۲$.

۳- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟

در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این عدد بین ۰/۴۲ و ۰/۴۳ بوده است و پس از رسم بزرگ‌تر این فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم : $۰/۴۲۹ > \frac{۳}{۷} > ۰/۴۲۸$.

با تکرار مراحل فعالیت بالا در هر مرحله اعدادی اعشاری به‌دست می‌آیند و دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که به عدد انتخاب شده نزدیک می‌شوند. در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این دنباله به شکل زیر است.

۰/۴ , ۰/۴۲ , ۰/۴۲۸ , ۰/۴۲۸۵ , ...

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می شوند. جمله‌ی nام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله‌ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به دست می آید. این دنباله را دنباله‌ی تقریبات اعشاری x می نامند و جمله‌ی nام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می نامند.

مثال

۱- دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{۱}{۳}$ با تقسیم ۱ بر ۳ به صورت زیر در می‌آید.

۰/۳ و ۰/۳۳ و ۰/۳۳۳ و ... و ۰/۳...۳ و ....

۲- با تقسیم ۱۱ بر ۶ در خارج قسمت به ترتیب اعداد زیر ساخته می‌شوند که دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{۱۱}{۶}$ است.

۱/۸ و ۱/۸۳ و۱/۸۳۳ و ۱/۸۳۳۳ و ...

مسائل

۱- در مورد هر یک از دنباله‌های زیر حدس بزنید جملات این دنباله‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند و با تشکیل دنباله‌ی تفاضل حدس خود را بیازمایید.

الف) ...,۰/۹,۰/۹۹,۰/۹۹۹

ب) ...,۲/۹,۲/۹۹,۲/۹۹۹

ج) ..., ۵/۰۵ , ۵/۰۰۵ , ۵/۰۰۰۵

د) ...,۱/۱۹,۱/۱۹۹,۱/۱۹۹۹

۲- با تقسیم ۵ بر ۱۱، خارج قسمت‌های به‌دست آمده در هر مرحله را به صورت یک دنباله بنویسید این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.

۳- در چه حالتی جملات یک دنباله‌ی حسابی به عدد خاصی نزدیک خواهند شد؟

۴- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد و جمله‌ی اول آن صفر نباشد، توضیح دهید که چرا جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؟

۵- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱ باشد جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۶- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$۲x+۱<۸/۱۳۱۶ \quad , \quad ۴-x<۰/۴۳۴۳$$

۷- دو جمله‌ی اول تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را با استفاده از روش فعالیت این بخش بنویسید.

ریشه گیری اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم اعداد حقیقی آشنا شدیم. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد.

عدد حقیقی b را یک ریشه‌ی k ام عدد حقیقی a نامیم هرگاه: $b^k = a$

مثال

۱- ۴، یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است زیرا $۶۴ = ۴^۳$. همچنین ۲ یک ریشه‌ی چهارم ۱۶ است زیرا $۱۶ = ۲^۴$.

۲- (-۲)، یک ریشه‌ی پنجم -۳۲ است زیرا : $(-۲)^۵ = -۳۲$.

اگر k زوج باشد فقط اعداد نامنفی ریشه kام دارند(چرا؟) و اگر b یک ریشه‌ی kام عدد نامنفی a باشد آنگاه $-b$، نیز یک ریشه‌ی kام a است زیرا : $(-b)^k = b^k = a$.

برای kهای زوج آن ریشه‌ی kام عدد نامنفی a که نامنفی است را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند.

۳- $\sqrt[k]{۱} = ۱$, $\sqrt[k]{۰} = ۰$, $\sqrt[۴]{۸۱} = ۳$, $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$, $\sqrt[۴]{۱۶} \neq -۲$

برای k های فرد هر عددی، مثبت یا منفی، مانند a ریشه‌ی kام دارد و فقط یک ریشه‌ی kام دارد که با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند. برای kهای فرد، علامت $\sqrt[k]{a}$ و علامت a یکی است. (چرا؟).

۴- (k فرد است) $\sqrt[k]{-۱} = -۱$, $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

توجه داشته باشید که ریشه kام یک عدد مانند a که با $\sqrt[k]{a}$ نشان داده‌ایم عددی است که اگر به توان k برسد برابر a می‌شود، پس : $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

علامت‌گذاری $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که a منفی و k زوج باشد معنا ندارد و هر وقت از این علامت استفاده کنیم به طور ضمنی فرض بر آن است که اگر k زوج باشد a نامنفی است.

فعالیت

۱- فرض کنید k یک عدد طبیعی فرد است. توان kام چه عددی برابر a^k است. نتیجه بگیرید :

$$\sqrt[k]{a^k} = a$$

۲- فرض کنید k یک عدد طبیعی زوج است. توان kام چه اعدادی برابر a^k است؟ توان kام چه عدد مثبتی برابر a^k است. نتیجه بگیرید : $\sqrt[k]{a^k} = |a|$.

۳- بنا به تعریف دیدیم : $(\sqrt[k]{a})^k = a$. مقدار $(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b})^k$ را حساب کنید و نتیجه بگیرید :

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$$

۴- از تساوی بالا استفاده کنید و نشان دهید : $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

۵- دلیل درستی تساوی‌های زیر را بیان کنید.

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$$

از این تساوی‌ها نتیجه بگیرید : $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

مثال

$$\sqrt[۶]{۸} = \sqrt{\sqrt[۳]{۸}} = \sqrt{۲}$$

توان‌رسانی با توان اعداد گویا

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. در یک آزمایش کشت یک نوع باکتری دیده شد که در شرایط مساعد وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود.

بنابراین اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم، در پایان ساعت اول، دوم، ... ، nام مقدار باکتری‌ها را می‌توانیم از دنباله‌ی زیر پیدا کنیم.

$$۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \ldots, ۲^n$$

محمد از پدرش پرسید : آیا باید حتماً تا پایان ساعت منتظر شویم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها

را پس از نیم ساعت هم پیدا کنیم؟

پدر محمد گفت : تو فکر می‌کنی پس از نیم ساعت وزن باکتری‌ها چه‌قدر شده باشد؟

محمد گفت : حدس می‌زنم وزن آن‌ها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد.

پدر محمد گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چه‌قدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را بیابیم. اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت باکتری‌ها b برابر شوند، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها برابر $b\times b=b^{۲}$ می‌شود. از طرفی پس از یک ساعت باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $b^{۲}=۲$. بنابراین $b=\sqrt{۲}$ (زیرا b مثبت است)، پس : $۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$.

فعالیت

۱- با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $۲^{\frac{۱}{۳}}$ به دست می‌آورید؟

۲- با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $۲^{\frac{۱}{n}}$ به دست می‌آورید؟

۳- اگر باکتری‌ها در هر ساعت ۳ برابر می‌شدند، و با ۱ گرم باکتری شروع می‌کردیم، وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چه‌قدر می‌شد؟

۴- با روش‌های مشابه چه مقداری را برای $۳^{\frac{۱}{۲}}$ و $۳^{\frac{۱}{n}}$ به دست می‌آورید؟

۵- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد چه مقداری را برای $a^{\frac{۱}{n}}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۶- اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی و p یک عدد صحیح باشد چه مقداری را برای $a^{\frac{p}{n}}$ پیشنهاد می‌کنید؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یک عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r=\frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n یک عدد طبیعی است، a^{r} که توان rام a نام دارد، مناسب است که به شکل زیر تعریف شود :

$$\boxed{a^{r}=a^{\frac{p}{n}}=(\sqrt[n]{a})^{p}}$$

مثال

۱- $۴^{\frac{۳}{۲}} = (\sqrt[۲]{۴})^{۳} = ۲^{۳} = ۸$

۲- $۶^{-\frac{۱}{۲}} = (\sqrt[۲]{۶})^{-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۶}}$

۳- $\sqrt{۲}^{\frac{۳}{۵}} = (\sqrt[۵]{\sqrt{۲}})^{۳} = \sqrt[۱۰]{۲^{۳}} = \sqrt[۱۰]{۸}$

تمرین در کلاس

۱- هر یک از اعداد $۲^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۲}{۴}}$ و $۲^{\frac{۳}{۶}}$ را با استفاده از تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا حساب کنید و پس از ساده کردن نتیجه بگیرید که همگی آن‌ها با هم برابرند.

۲- اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد برای یک عدد طبیعی k داریم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ با استفاده از تعریف توان رسانی با توان اعداد گویا با محاسبه‌ی هریک از توان‌رسانی‌های داده شده پس از ساده کردن نتیجه بگیرید : $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}}$ $(a>۰)$

قوانین توان‌رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است. در زیر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا هستند.

$$a^{r+s} = a^{r}a^{s}$$

$$(a^{r})^{s} = a^{rs}$$

$$(ab)^{r} = a^{r}b^{r}$$

با نوشتن r و s به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی و استفاده از تعریف توان‌رسانی به توان اعداد گویا و استفاده از روابط ریشه‌گیری درستی این تساوی‌ها را می‌توان به‌دست آورد.

مثال

$$5^{\frac{7}{6}}=5^{1+\frac{1}{6}}=5\times5^{\frac{1}{6}}=5\sqrt[6]{5}$$

$$(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{2})^3=\sqrt[4]{8}$$

$$8^{\frac{1}{2}}=(4\times2)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

مسائل

۱- برای هر عدد گویای r نشان دهید : $1^r=1$.

۲- برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی مثبت a نشان دهید : $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$.

۳- عدد $\sqrt[12]{64}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه‌ی ۳ بنویسید.

۴- ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید و پس از ساده کردن مجدداً بر حسب ریشه‌گیری بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$ ب) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{14}}$ ج) $\sqrt[5]{4}\div\sqrt[8]{8}$

۵- برای هر عدد حقیقی مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

۶- برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی مثبت a نشان دهید : $0<a^r$.

۷- فرض کنید a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، با ضرب طرفین نامساوی $1<a$ در a و ضرب مجدد نامساوی به‌دست آمده در a و ادامه‌ی این عمل نتیجه بگیرید :

$$1<a<a^2<a^3<....<a^n<...$$

اما اگر a عددی مثبت و کمتر از ۱ باشد با روش مشابه نشان دهید :

$$....<a^n<...<a^3<a^2<a<1$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی

محمد که توانسته بود توان‌رسانی به توان اعداد گویا را تعریف کند به این فکر افتاد که آیا می‌توان، توان‌رسانی به توان اعداد گنگ را هم تعریف کرد. مثلا، آیا می‌توان $۲^{\sqrt{۲}}$ را تعریف کرد و معنایی برای آن پیدا کرد؟

محمد نزد دبیر ریاضی خود رفت و از او کمک خواست. دبیر به او گفت از تجربه‌ی خود در تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ استفاده کند.

محمد گفت : در تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ از وزن باکتری‌هایی که در هر ساعت ۲ برابر می‌شدند استفاده کردیم. اگر با ۱ گرم باکتری شروع می‌کردیم پس از r ساعت که r یک عدد گویا است وزن باکتری‌ها ۲^{r} گرم بود. بنابراین پس از $\sqrt{۲}$ ساعت نیز وزن باکتری‌ها باید $۲^{\sqrt{۲}}$ گرم باشد.

دبیر گفت : این معنای مناسبی برای $۲^{\sqrt{۲}}$ است ولی چگونه آن را محاسبه می‌کنید؟

محمد گفت : در محاسبه‌ی $۲^{\frac{۱}{۲}}$ از ریشه‌گیری استفاده کردیم اما برای محاسبه‌ی $۲^{\sqrt{۲}}$ راهی به نظر من نمی‌رسد.

دبیر گفت : در کار کردن با اعداد حقیقی معمولاً محاسبه‌ی دقیق امکان‌پذیر نیست و بهتر است دنبال یافتن تقریبات اعشاری آن‌ها باشیم. آیا می‌توان تقریبات اعشاری $۲^{\sqrt{۲}}$ را به دست آورد؟

محمد گفت : این ممکن است، زیرا ما تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را می‌شناسیم که دنباله‌ای به شکل زیر است.

$$۱/۴ \,,\, ۱/۴۱ \,,\, ۱/۴۱۴ \,,\, ۱/۴۱۴۲ \,,\, ...$$

پس با محاسبه‌ی مقدارهای $۲^{۱/۴} \,,\, ۲^{۱/۴۱} \,,\, ۲^{۱/۴۱۴} \,,\, ۲^{۱/۴۱۴۲} \,,\, ...$ می‌توانیم مقدارهای تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌دست آوریم.

دبیر گفت : درست است. سپس افزود به طور کلی می‌توان همانند توان‌رسانی به توان اعداد گویا برای اعداد حقیقی توان‌رسانی را تعریف نمود. دلایل آن را سال‌های بعد می‌بینید. شما با این روش می‌توانید برای هر عدد حقیقی b و عدد حقیقی مثبت a توان bام a را تعریف کنید.

بیندیشیم

چرا برای هر عدد حقیقی b می‌توانیم نشان دهیم : $۱^b = ۱$ ؟

توان bام a را با a^b نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که در توان رسانی، پایه همواره عددی مثبت است ولی نما هر عددی می‌تواند باشد.

قوانین توان رسانی به توان اعداد گویا برای توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم برقرارند. در زیر a و c اعداد حقیقی مثبتی هستند و b و d اعداد حقیقی دل‌خواهی هستند.

$$a^{b+d} = a^b a^d$$

$$(a^b)^d = a^{bd}$$

$$(ac)^b = a^b c^b$$

مثال

$$۵^{۱-\sqrt{۳}} \times ۵^{۱+\sqrt{۳}} = ۵^{۱-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}} = ۵^{۲} = ۲۵$$

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{۲} = ۳$$

$$(\pi-۱)^{\sqrt{۳}}(\pi+۱)^{\sqrt{۳}} = \left((\pi-۱)(\pi+۱)\right)^{\sqrt{۳}} = (\pi^{۲}-۱)^{\sqrt{۳}}$$

مسائل

۱– مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $۲^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۳}}$

ب) $(\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}$

ج) $(\sqrt{۱۵}^{(۲-\sqrt{۲})})^{(۲+\sqrt{۲})}$

د) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}$

۲- مقدار مثبت x را به گونه‌ای تعیین کنید که $x^{\sqrt{۲}}$ برابر ۲ شود.

(راهنمایی : در معادله‌ی $x^{\sqrt{۲}} = ۲$ طرفین را به توان $\sqrt{۲}$ برسانید.)

۳- نشان دهید : $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$. $(a>۰)$

۴- برای اعداد حقیقی مثبت a و c و اعداد حقیقی b و d نشان دهید :

$$(\frac{a}{c})^b = \frac{a^b}{c^b} \quad , \quad \frac{a^b}{a^d} = a^{b-d} \quad , \quad a^{-b} = \frac{۱}{a^b}$$

۵- با استفاده از خواص اساسی توان‌رسانی، برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی دلخواه b نشان دهید : $a^b = (a^{\frac{b}{۲}})^۲$ و نتیجه بگیرید : a^b همواره عددی مثبت است.