

توابع نمایی و لگاریتمی

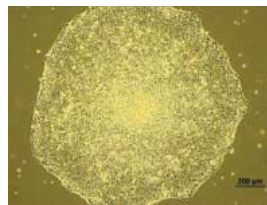
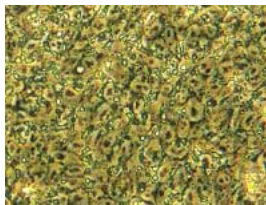
فصل ۴



آیا رشد سلول‌ها، نظام‌های بانکداری در دنیا و نحوه‌ی محاسبه‌ی سنّ یک درخت کهنسال یا سنگ از دوران باستان، تابع قانون‌مندی‌های خاصی است؟
 امروزه باتوجه به رشد روزافزون روش‌های پژوهشی کمی در علوم، هم نیاز و هم امکان استفاده از روش‌های ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر افزایش یافته‌است و مهم‌ترین ویژگی به کارگیری ریاضی، توانایی الگوسازی‌های ریاضیات است. یکی از جدیدترین این نمونه‌ها نقش الگوهای ریاضی در مطالعه‌ی سلول‌های بنیادی است.

سلول‌های بنیادی

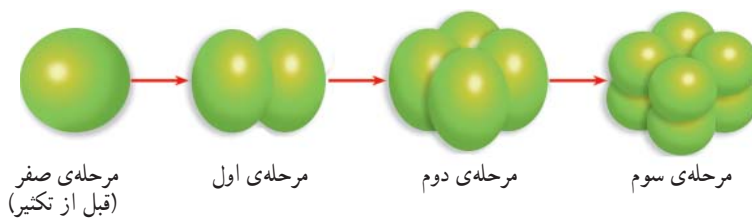
در یکی از روزهای سال ۱۳۸۲ این خبر به تمام دنیا مخابره شد. پژوهشکده‌ی رویان به عنوان مرکز تحقیقات علوم سلولی و درمان ناباروری جهاد دانشگاهی، موفق به تولید سلول‌های بنیادی جنینی انسان شد. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب، ماهیچه‌ی قلبی، کبدی و ... را به وجود آورند.



شکل ۱- (سمت چپ) یک مجموعه از سلول‌های بنیادی دارای حدود ۱۰ هزار سلول است که در سمت راست با بزرگ‌نمایی بیشتر، سلول‌ها به صورت واضح نشان داده شده‌اند.

قابلیت

در شکل (۲) روند تکثیر سلول بنیادی جنینی در ۴ مرحله نشان داده شده است.



شکل ۲

۸۶

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنینی مانند شکل (۲) ادامه پیدا کند :



فکر می‌کنید پس از مرحله‌ی نهم، چه تعداد سلول بنیادی خواهیم داشت؟ برای یافتن پاسخ ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم .

تعداد سلول‌های بنیادی تکثیر شده	تعداد مراحل تکثیر سلول‌ها
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵
۶۴	۶
۱۲۸	۷
۲۵۶	۸
۵۱۲	۹

جدول ۱

با توجه به جدول (۱) می‌بینیم که سرعت تکثیر سلول‌های بنیادی چه قدر زیاد است !

۱- پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده، برابر با 2^{48} سلول خواهد بود؟

۲- آیا اعداد این جدول الگویی را مشخص می‌کنند؟ آیا می‌توانید قانونی بین این دو کمیت یعنی تعداد سلول‌ها و مراحل تکثیر آن‌ها به دست آورید؟

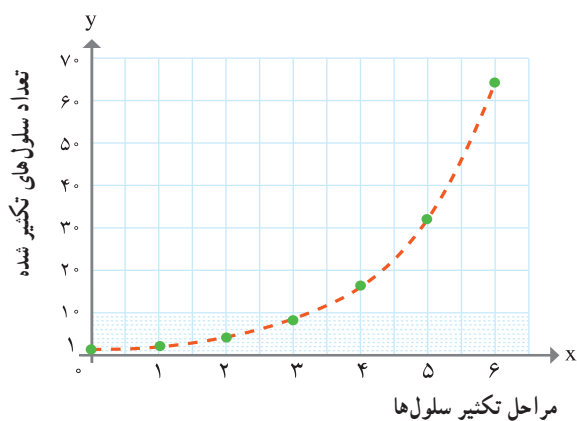
اگر بخواهیم تعداد سلول‌های تکثیر شده در مرحله‌ی بیستم یا مرحله‌ی سی‌ام و یا هر مرحله‌ی دیگری پیدا کنیم ، قطعاً باید به دنبال راه میان بری بگردیم وگرنه محاسبات طولانی و وقت گیر خواهد بود. به همین منظور جدول (۱) را بر حسب توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم، جدول (۲) به دست می‌آید. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب پر کنید.

مراحل تکثیر سلول‌ها	تعداد سلول‌های تکثیر شده
۰	$2^0 = 1$
۱	$2^1 = 2$
۲	$2^2 = 4$
۳	$2^3 = 8$
۴	$2^4 = 16$
⋮	⋮
۹	$2^9 = 512$
⋮	⋮
?	۱۶۳۸۴
⋮	⋮
2^0	$2^? = ?$
⋮	⋮
?	۳۳۵۵۴۴۳۲
⋮	⋮

جدول ۲

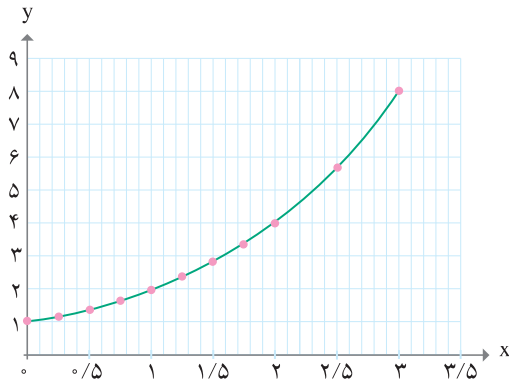
نمودار زیر، رابطه‌ی بین مراحل مختلف تکثیر سلول‌ها و تعداد سلول‌های تکثیر شده را نشان

می‌دهد:



در فصل اول یک الگوی نمایی برای رشد باکتری‌ها به دست آوردیم که جرم تقریبی باکتری‌ها از ضابطه‌ی $g(x) = 2^x$ ، محاسبه می‌شد، دوباره به آن فعالیت باز می‌گردیم:

- ۱- مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم نمایید و نمودار آن را رسم کنید.
- ۲- اگر محور x ‌ها، بیانگر زمان و محور y ‌ها بیانگر جرم باکتری‌ها باشد، نمودار تابع $g(x) = 2^x$ را برای $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$ رسم نمایید و سپس آن را با شکل زیر مقایسه کنید.



می‌توانیم این نمودار را بر حسب تابع $y = 2^x$ بیان کنیم. به این گونه تابع‌ها، تابع نمایی می‌گویند که به دلیل متغیر بودن نما، چنین نامی به آن‌ها داده شده است. برای تمام اعداد حقیقی x ، (گویا و گنگ)، این منحنی را می‌توان برای نمایش تابع $g(x) = 2^x$ به کار برد. در این الگو رابطه‌ی بین زمان و مراحل رشد باکتری، یک تابع نمایی است زیرا رشد باکتری‌ها بر حسب زمان، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

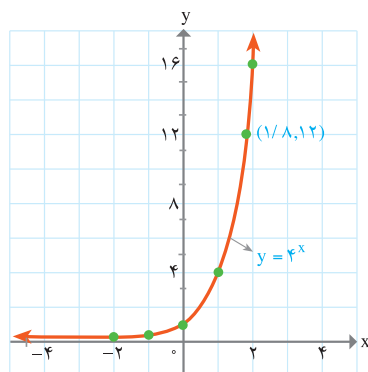
آیا عبارت $(-2)^x$ را می‌توان به ازای تمام x ‌های حقیقی محاسبه کرد؟

هر تابع به صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی و $a \neq 1, 0$ ، x یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

- ۱- دامنه و برد تابع $y = a^x$ را به دست آورید.
 ۲- آیا تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع یک به یک است؟ چرا؟

الف) نمودار تابع نمایی $y = 4^x$ را در نقاط داده شده جدول زیر به دست آورید و سپس نقاط را به یکدیگر وصل نمایید.

x	4^x	y
-۲	4^{-2}	$\frac{1}{16}$
-۱	4^{-1}	$\frac{1}{4}$
۰	4^0	۱
۱	4^1	۴
۲	4^2	$4^2 = 16$



حل:

نمودار تابع نمایی 4^x ، محور y ها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار $y = 4^x$ ، مقدار تقریبی $4^{1/8}$ را به دست آورید.

حل : از نمودار این تابع می توان به طور تقریبی مقدار y را برای همه ی مقادیر حقیقی x به دست آورد. با توجه به نمودار مقدار تقریبی y وقتی که $x = 1/8$ است، برابر با ۱۲ می باشد. با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی $4^{1/8}$ برابر است با :

$$4^{1/8} \cong 12/12573253$$

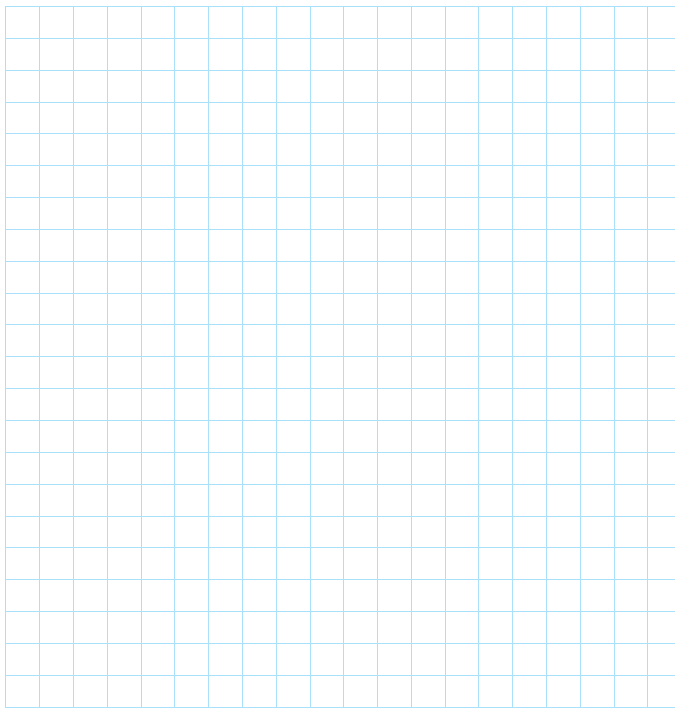


۱- نمودار تابع $y = 7^x$ را به ازای $-1 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

۲- مقدار تقریبی $7^{1/6}$ را با استفاده از نمودار تابع به دست آورید.

۳- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = 4^x$ و $y = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن ها را با هم مقایسه کنید.

جدولی تنظیم کنید که مقادیر y را به ازای x های صحیح بین $-3 \leq x \leq 3$ به دست آورید. این سه تابع در چه چیزهایی با یک دیگر مشترک هستند؟

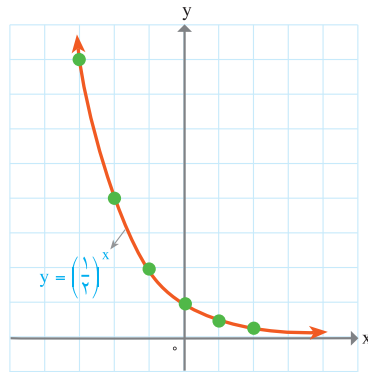


x	$(\frac{1}{4})^x$	y
-3	$(\frac{1}{4})^{-3}$	8
-2	$(\frac{1}{4})^{-2}$	4
-1	$(\frac{1}{4})^{-1}$	2
0	$(\frac{1}{4})^0$	1
1	$(\frac{1}{4})^1$	$\frac{1}{4}$
2	$(\frac{1}{4})^2$	$\frac{1}{16}$

الف) نمودار $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها، چیست؟

حل: چند نقطه‌ی دلخواه را در نظر می‌گیریم.



نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور y ها، ۱ می‌باشد.

ب) با استفاده از شکل تابع، مقدار تقریبی $(\frac{1}{4})^{-2/5}$ را به دست آورید.

حل: مقدار y وقتی که $x = -2/5$ است، حدوداً $5/5$ است. مقدار تقریبی $(\frac{1}{4})^{-2/5}$

برابر با $(\frac{1}{4})^{-2/5} \cong 5/656854249$ می‌باشد.

۱- نمودار $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$ را رسم کنید. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها، چیست؟

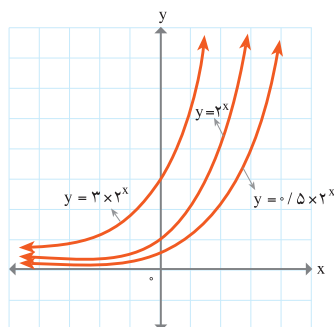
۲- با استفاده از نمودار تابع فوق، مقدار تقریبی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/5} + 2$ را به دست آورید.

توجه شود که در نمودار مثال قبل وقتی که x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر، مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. به طور کلی این وضعیت برای تمام توابع نمایی $y = a^x$ و $0 < a < 1$ برقرار است.

۳- از روی نمودار، ویژگی‌های تابع a^x را برای حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ را مشخص نمایید.

مثال

در شکل زیر، نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = 3 \times 2^x$ و $y = \frac{1}{5} \times 2^x$ نشان داده شده است. توجه کنید:



همان‌گونه که از نمودارها، مشخص است، محل تقاطع منحنی $y = 2^x$ با محور y ها، نقطه‌ی $y = 1$ ،

منحنی $y = 3 \times 2^x$ ، نقطه‌ی $y = 3$ و برای منحنی $y = \frac{1}{5} \times 2^x$ ، نقطه‌ی $y = \frac{1}{5}$ می‌باشد.

تعمیر

باتوجه به نمودار این سه تابع، چه وجه مشترک و چه وجه اختلافی بین این توابع ملاحظه می‌کنید؟

۱- فکر می‌کنید توابع $y = 10^x$ و $y = (\frac{1}{10})^x$ در چه نقطه‌ای محور y ها را قطع می‌کنند.

آیا می‌توانید بدون استفاده از جدول، نمودار تقریبی این دو تابع را رسم کنید؟

۲- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = 4^x$ و $y = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و

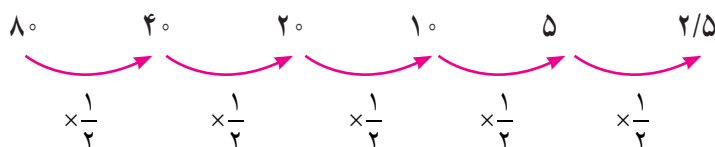
آن‌ها را در $0 < x < 1$ و $x > 1$ و $x < 0$ با هم مقایسه کنید.

مثال

در جدول زیر، مقادیر x و y از یک تابع داده شده‌است. رفتار این تابع یا چگونگی تغییرات این تابع، یک تابع نمایی را مشخص می‌کند یا خیر؟ چرا؟

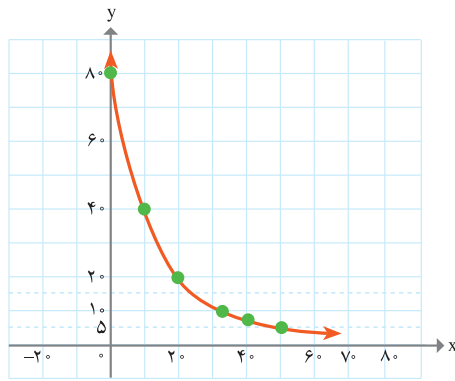
x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲/۵

حل: مقادیر x به صورت منظم، به فاصله‌ی ده واحد اضافه می‌شوند. مقادیر y به صورت زیر می‌باشند:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر y با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی، به دست می‌آیند. با توجه به این که دامنه‌ی تغییرات x به صورت منظم در یک فاصله‌ی معین است و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت است لذا این داده‌ها می‌تواند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشد.

نقاط معلوم در جدول را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس آن‌ها را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم. شکل این تابع، همانند شکل یک تابع نمایی است.



نمودار
در
کلاس

آیا می‌توانید عبارت دقیق تابع نمایی بالا را به دست آورید؟

مسائل

۱- نمودار هر دسته از تابع‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

الف) $y = 2^x - 4$ ، $y = 2^x + 3$ ، $y = 2^x$

ب) $y = 2^{x-4}$ ، $y = 2^{x+5}$ ، $y = 2^x$

ج) $y = 5^x$ ، $y = 3^x$ ، $y = 2^x$

۲- در جدول زیر نقاطی از یک تابع داده شده است. آیا چگونگی تغییرات این تابع، نمایی است؟ چرا؟

x	0	10	20	30	40	50
y	15	21	27	33	39	45

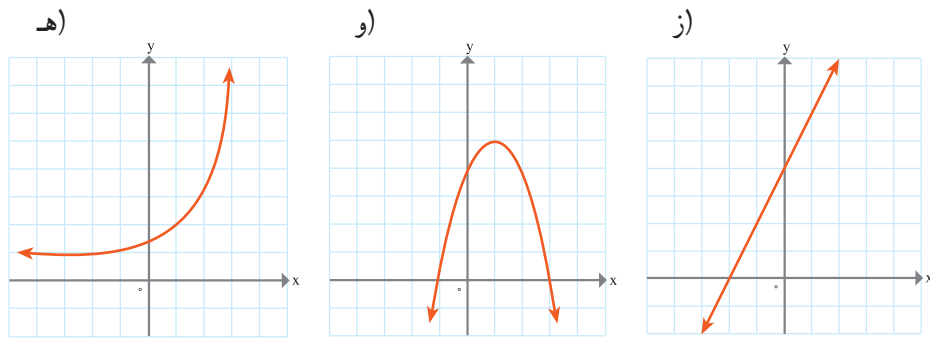
۳- رفتار یا چگونگی تغییرات کدام یک از توابع زیر، نمایی است؟

الف) $y = 4^x + 3$

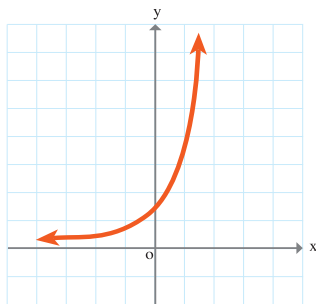
ب) $y = 2x(x-1)$

ج) $y + 5x = 8$

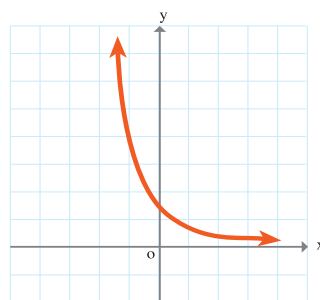
د) $y = x^4 + 3$



۴- نرگس و فاطمه نمودار $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کرده‌اند. کدام یک از آن‌ها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط فاطمه



نمودار رسم شده توسط نرگس

۵- توابع $y = 3^x$ و تابع $y = x^3$ چه فرق اساسی با هم دارند؟

۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید. محل تقاطع نقاط نمودار با محور y ها را پیدا کنید. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ی داده شده را به دست آورید.

الف) $y = 9^x$; $x = 0/8$

ب) $y = (\frac{1}{4})^x$; $x = 1/7$

ج) $y = 10^x$; $x = 0/3$

د) $y = (\frac{1}{6})^x$; $x = -1/3$

۷- مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمایی است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۶	۳۶	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۷۷۶

ب)

x	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵

ج)

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

د)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵

ه)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

و)

x	-۱	۰	۱	۲
y	-۰/۵	۱/۵	-۲	+۴

۸- مشخص کنید که از توابع زیر، کدام یک خطی هستند، کدام یک درجه ی دوم و کدام یک رفتار نمایی دارند؟

الف) $y = 7^x - 4$

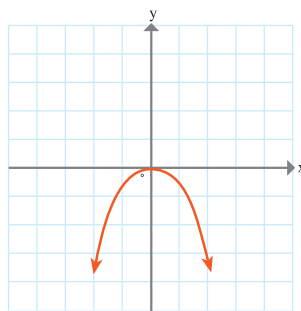
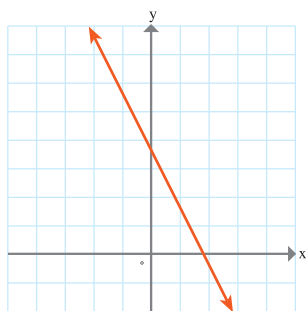
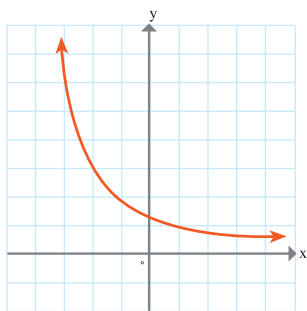
ب) $y = -x(x+1)$

ج) $y + 3x = 5$

د)

ه)

و)



(این قسمت از مطالب کتاب یعنی رشد و زوال نمایی، صرفاً جهت اطلاعات بیشتر دانش‌آموزان است و به عنوان سرفصل رسمی درس محسوب نمی‌شود.)

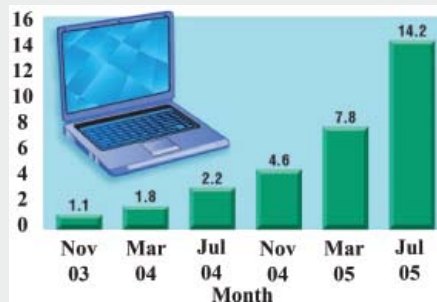
رشد و زوال نمایی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی می‌پردازیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم.

رشد نمایی

در یک بررسی آماری در یکی از کشورها، افزایش تعداد وبلاگ‌ها از نوامبر سال ۲۰۰۳ (آبان ماه ۱۳۸۲) تا جولای ۲۰۰۵ (تیرماه ۱۳۸۴) ۱۳/۷ درصد در هر ماه بوده است. فرض کنید y بیانگر تعداد کل وبلاگ‌ها برحسب میلیون و t بیانگر ماه‌ها از نوامبر ۲۰۰۳ باشد. در این صورت تعداد متوسط وبلاگ‌ها در هرماه از قانون (الگوی) زیر پیروی می‌کند.

$$y = 1/1(1 + 0/137)^t = 1/1(1/137)^t$$



همان گونه که مشاهده می‌شود، رشد وبلاگ‌ها، یک نمونه از رشد نمایی است. مثال دیگری از رشد نمایی سود بانکی می‌باشد.



پدر علی، مبلغ ۱۰۰ هزار تومان در حساب پس‌انداز، در یکی از بانک‌های کشور ذخیره می‌کند. طبق قانون اعلام شده از سوی بانک، این پول‌ها در ساخت یک بزرگراه سرمایه‌گذاری می‌شود. پیش‌بینی بانک این است که با گرفتن عوارض و درآمدهای تبلیغاتی بزرگراه در ۱۰ سال

آینده، حداقل می‌توان ۱۴ درصد سود پرداخت کرد. پدر علی، به علی می‌گوید که این حساب پس‌انداز را برای تو باز کرده‌ام و الآن که سن تو ابتدای ۱۷ سال است حساب‌کن که در پایان ۲۵ سالگی، چه میزان پول در حساب پس‌اندازت وجود خواهد داشت؟
علی شروع به محاسبه کرد. مقدار پس‌انداز پایان سال اول ابتدای ۱۸ سالگی برابر است با:

$$100,000 + (100,000 \times \frac{14}{100}) = 100,000 + 14,000 = 114,000$$

مقدار پس‌انداز در پایان ۱۸ سالگی برابر است با:

$$114,000 + (114,000) \times \frac{14}{100} = 129,960$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$[100,000(1/14)](1/14) = 100,000(1/14)^2$$

به همین صورت اگر ادامه دهیم مقدار پس‌انداز علی پس از پایان ۲۵ سالگی برابر است با:

$$(100,000) \times (1 + \frac{14}{100})^9$$

بنابراین در حالت کلی، اگر نرخ سود $(100 \cdot r)$ درصد و سالیانه قابل پرداخت باشد، در این صورت اگر مبلغی در پایان سال اول پرداخت می‌گردد (اصل به علاوه سود) y_1 باشد،

$$y_1 = c + rc = c(1+r) \quad \text{داریم:}$$

که c مقدار اولیه‌ی پس‌انداز است.

$$y_2 = [c(1+r)][1+r] = c(1+r)^2 \quad \text{مبلغ پس از دو سال برابر است با:}$$

$$y_3 = [c(1+r)^2][1+r] = c(1+r)^3 \quad \text{مبلغ پس از ۳ سال برابر است با:}$$

معادله‌ی کلی رشد نمایی، به صورت $y = c(1+r)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات) بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

فرض کنید ۴۰۰ هزار تومان در حساب پس اندازی که هر سال ۱۲ درصد سود می دهد، ذخیره شده است. مبلغ پس انداز را در پایان سال سوم حساب کنید.

حل: با توجه به فرمول $y_n = c(1+r)^n$, $n = 3$, $c = 400$, $r = 0.12$ و لذا،

$$y_3 = 400,000(1+0.12)^3 = 561971/2$$

یعنی مبلغ پس انداز در پایان ۳ سال برابر با ۵۰۶/۱۹۷ هزار تومان است.

فعالیت

رشد جمعیت ایران طی سال های ۱۳۳۵ تا ۱۳۶۵، حدود ۳ درصد بوده است. اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۵۵، حدود ۱۹ میلیون نفر بوده باشد، جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ چند نفر بوده است؟ اگر این رشد همچنان باقی می ماند، جمعیت کشور در سال ۱۳۸۸ چند میلیون نفر خواهد بود؟ از سال ۱۳۷۰ رشد جمعیت ایران با کاهش بی سابقه ای به حدود ۱/۵ درصد تنزل یافت. بنابراین اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ حدود پنجاه میلیون نفر بوده است، با نرخ رشد ۱/۵ درصد، جمعیت ایران در سال ۱۳۸۸ چند نفر خواهد بود؟ اگر همین نرخ رشد ثابت بماند، جمعیت ایران در سال ۱۴۰۴ چند نفر خواهد بود؟

زوال نمایی

همانند رشد نمایی، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $y = c(1-r)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

۱- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۶/۶۰ درصد بادش را از دست می دهد. قایق بادی دارای ۷۳۷۴۱/۷۸۸ سانتی متر مکعب باد می باشد.

۱۰۰

الف) معادله‌ای بنویسید که بیانگر میزان از دست دادن باد قایق باشد.
 حل: معادله‌ی کلی برای نزول نمایی به صورت $y = c(1-r)^t$ است. لذا با توجه به اطلاعات داده شده در مثال، می‌توان نوشت:

$$y = 73741/788(1 - 0.066)^t = 73741/788(0.934)^t$$

بنابراین معادله‌ای که بیانگر از دست دادن باد در قایق است به صورت $y = 73741/788(0.934)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار باد در قایق بر حسب سانتی متر مکعب و t بیانگر تعداد روزهاست.
 ب) میزان بادی که بعد از ۷ روز قایق از دست می‌دهد، تخمین بزنید.

حل: معادله‌ی از دست دادن باد

$$y = 73741/788(0.934)^t =$$

$$= 73741/788(0.934)^7 \quad t = 7$$

با استفاده از ماشین حساب

بنابراین میزان بادی که قایق بعد از ۷ روز از دست داده، ۴۵۷۱۹ سانتی متر مکعب می‌باشد.
 ۲- جمعیت یکی از کشورهای خارجی، در سال ۲۰۰۰ میلادی برابر با ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ نفر بوده است. رشد جمعیت این کشور با نرخ ۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با توجه به این که معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت $y = c(1-r)^t$ می‌باشد با جایگذاری c, r, t جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ برابر است با:

$$y = 40,000,000(1 - 0.01)^{10} = 36,175,283$$



- ۱- فرض کنید در یک کشت باکتری، در پایان ۲ روز تعداد ۳۶۰,۰۰۰ باکتری و در پایان ۴ روز تعداد ۳,۲۴۰,۰۰۰ باکتری وجود دارند. مطلوب است:
 - الف) تعداد باکتری‌ها در شروع آزمایش
 - ب) تعداد باکتری‌ها در پایان ۲۴ ساعت
 - ج) تعداد باکتری‌ها در پایان ۳ روز
 - د) تعداد روزهایی که در پایان آن تعداد باکتری‌ها برابر با ۲۹,۱۶۰,۰۰۰ خواهد بود.
- ۲- جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۰۰ میلادی، برابر با ۱۰۰,۳۵۰,۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر نرخ رشد جمعیت ۱/۷٪ در سال باشد، جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۱۲ چند نفر خواهد بود؟
- ۳- شخصی در بیست و پنجمین سالگرد تولدش وارث ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان شد. اگر این

شخص این مبلغ را با نرخ هشت درصد سود سالیانه سرمایه گذاری کند هنگام بازنشستگی در سن ۶۵ سالگی چه مبلغی دریافت می کند؟

۴- جمعیت کشور لیتوانی در سال ۲۰۰۵، برابر با ۲،۲۳۷،۲۹۰ نفر بوده است. نرخ رشد جمعیت در این کشور با نرخ ۱/۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۵ میلادی چند نفر خواهد بود؟

۵- (هواشناسی). فشار اتمسفر (برحسب میلی بار) در ارتفاع x برحسب متر از سطح دریا، به وسیله‌ی تابع زیر تقریب زده می شود.

$$f(x) = 1038(1/0.00134)^{-x}$$

که x بین صفر تا ۱۰۰۰۰ خواهد بود.

الف) میزان فشار در سطح دریا چقدر است؟

ب) رستورانی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در اردبیل قرار دارد.

میزان فشار تقریبی اتمسفر در محل این رستوران چقدر است؟

ج) اگر ارتفاع افزایش پیدا کند، چه اتفاقی در فشار اتمسفر ایجاد خواهد شد؟

لگاریتم و تابع لگاریتمی

محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده‌های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آن آستانه شنوایی می‌گویند و همین‌طور محاسبه آستانه درد که قوی‌ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به کمک این مفهوم ریاضی یعنی لگاریتم قابل تعریف و محاسبه است. در پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه‌ریزی اقتصادی نقش تعیین‌کننده‌ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته‌ای است از لگاریتم استفاده می‌کنیم.

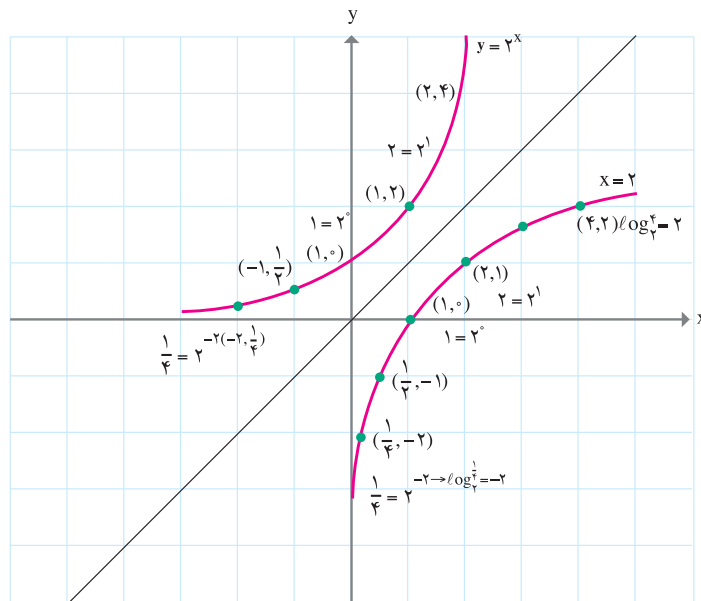
در بحث توابع نمایی دیدیم که تکثیر و رشد سلول‌ها از قوانین توابع نمایی پیروی می‌کنند. به کمک تابع نمایی $y = b^x$ می‌توان به‌طور مثال تعداد سلول‌ها را پس از زمان x پیش‌بینی کرد. در مواقعی نیاز است که بدانیم تعداد معینی از سلول‌ها پس از چه زمانی به وجود می‌آیند، برای پاسخ به این قبیل سؤالات از مفهوم جدیدی به نام تابع لگاریتمی که معکوس تابع نمایی است استفاده می‌کنیم.



تابع لگاریتمی چیست و چگونه ساخته می‌شود؟

با تابع نمایی $y = 2^x$ شروع می‌کنیم که تابعی یک به یک است و بنابراین تابع معکوس آن وجود دارد. به یاد آورید که معکوس تابع یک به یک $y = f(x)$ را می‌توان با یافتن قرینه‌ی نقاط روی نمودار تابع $f(x)$ نسبت به خط $y = x$ ساخت. به جدول و نمودار زیر توجه کنید:

$y = 2^x$		$x = 2^y$	
x	y	x	y
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3
0	1	1	0
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-3



شکل (۱)

در شکل (۱) نمودار تابع نمایی و نمودار تابع معکوس آن (که تابع لگاریتمی نامیده می‌شود) نشان داده شده است. به عنوان مثال نقطه‌ی (۴ و ۲) روی نمودار تابع نمایی است. و نقطه‌ی (۲ و ۴) که قرینه‌ی آن نسبت به خط $y = x$ است روی نمودار تابع معکوس آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. معکوس $y = 2^x$ را می‌توان به صورت $x = 2^y$ نوشت. در عبارت $x = 2^y$ ، x را لگاریتم x در پایه‌ی ۲ می‌خوانیم و با نماد $y = \log_2^x$ نشان می‌دهیم.

مثال

۱- هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت $x = 2^y$ بنویسید.

$$y = \log_4^{\frac{1}{4}} = -2$$

$$y = \log_2^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$1 = 2^0$$

۲- هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت $y = \log_2^x$ بنویسید.

$$2^5 = 32$$

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\log_2^{32} = 5$$

$$\log^1 6$$

فعالیت

۱- جدول‌ها را کامل کنید.

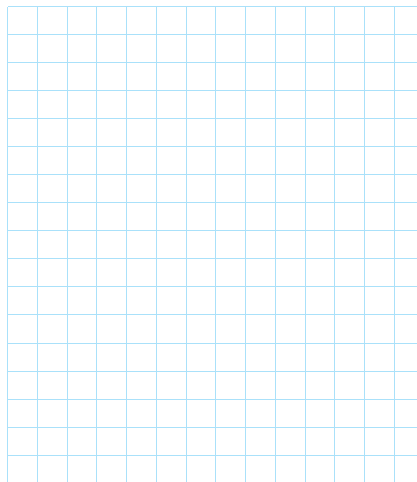
۲- هر یک از نقاط جدول‌ها را روی صفحه شطرنجی مشخص کنید و سپس نمودارهای تابع $y = 2^x$ و تابع $y = \log_2^x$ را رسم کنید.

۳- هر نقطه از نمودار تابع نمایی را با نقطه نظیرش از تابع لگاریتمی مقایسه کنید.

۴- دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید:

$f(x) = 2^x$	
$y = 2^x$	(x, y)
$1 = 2^0$	$(0, 1)$
...	$(1, 2)$
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$...
$(2, f(2))$...
$\frac{1}{4} = 2^{-2}$...
...	...
...	$(3, 8)$
...	...

$g(x) = \log_2^x$	
$y = \log_2^x$	(x, y)
$0 = \log_2^1$	$(1, 0)$
$1 = \log_2^2$...
...	$(\frac{1}{2}, -1)$
...	$(4, g(4))$
$\log_2^{\frac{1}{2}} = -2$...
$\log_2^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$...
...	$(2^3, 3)$
...	$(a, g(a))$



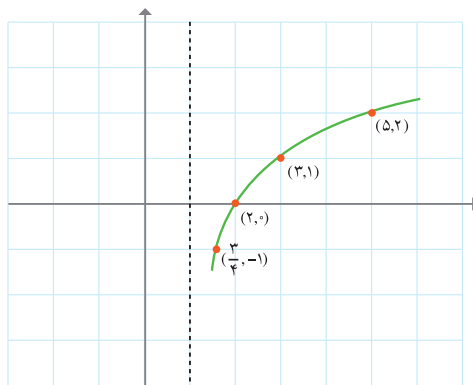
نمودار تابع $f(x) = 3^x$ و نمودار تابع معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) دامنه و برد هر کدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوس اش را با هم مقایسه کنید.

$y = \log_3^{(x-1)}$	
x	y
2	0
3	1
5	2
$\frac{3}{2}$	-1
...	...

اکنون می‌خواهیم نمودار تابع $y = \log_3^{(x-1)}$ را رسم کنیم.



توجه کنید که به x مقادیر کمتر از ۱ را نمی‌دهیم. زیرا دامنه‌ی تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است. یعنی باید: $x - 1 > 0$ باشد و در نتیجه $x > 1$ قابل قبول است.
 به همین دلیل ابتدا خط $x = 1$ را به صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم تا نمودار راحت‌تر و دقیق‌تر رسم شود.



می‌خواهیم نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ و نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

۱- ابتدا جدول زیر را تکمیل کنید:

(x, y)	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	$y = (\frac{1}{2})^x$	(x, y)
$(\frac{1}{2}, 1)$	$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$		$(1, \frac{1}{2})$
$(2, -1)$	$-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$		$(-1, 2)$
$(4, -2)$	$-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$		$(-2, 4)$
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
			$(,)$

۲- هر یک از نقاط دو جدول را در دستگاه مختصات مشخص کرده نمودار تابع لگاریتمی را رسم کنید.

۳- نمودار معکوس تابع لگاریتمی را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.



۴- دامنه و برد تابع نمایی را از روی نمودار مشخص کنید.

۵- دامنه و برد تابع لگاریتمی را از روی نمودار مشخص کنید.

۶- حدس می‌زنید که نمودارهای تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ چگونه باشند.



به نمودارهای زیر توجه کنید.

کدام شکل نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟

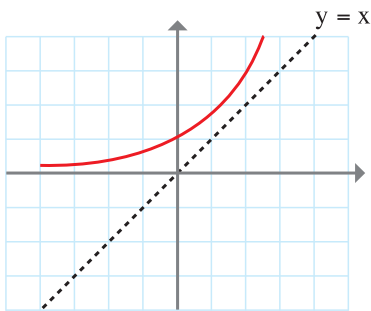
الف) $y = \log_2^{(x-2)}$

ب) $y = \log_3^x$

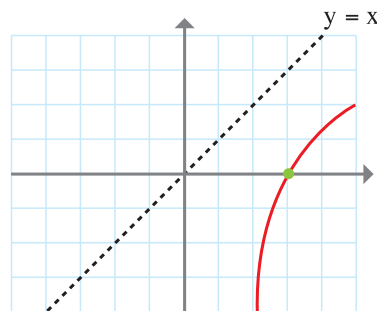
ج) $y = 2^{-x}$

د) $y = \log_{\frac{1}{2}}^x$

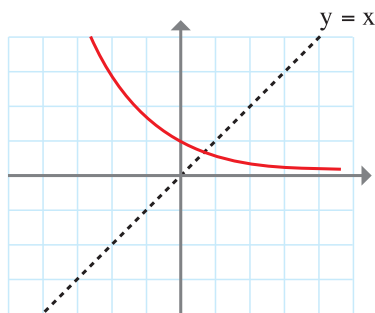
ه) $y = 2 + \log_2^x$



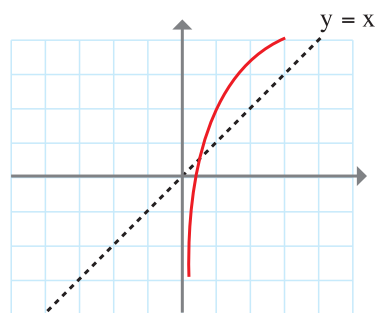
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

مجدداً به فعالیت‌های ۱ و ۲ و ۳ توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که تابع لگاریتمی برای مقادیر مثبت x تعریف می‌شود و به بیان دیگر دامنه تعریف تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد تابع لگاریتمی مجموعه R است.

محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

تابع $f(x) = \log_3^x$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $f(81)$ را به دست آوریم:

فرض کنیم: $f(81) = y$ یا $\log_3^{81} = y$

از تعریف لگاریتم داریم: $81 = 3^y$ و یا $3^y = 3^4$ و در نتیجه: $y = 4$

مثال

\log_8^2 و $\log_{\frac{1}{3}}^{81}$ را محاسبه کنید.

$$\log_8^2 = y$$

$$2 = 8^y$$

$$2 = 2^{3y}$$

$$1 = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^{81} = y$$

$$81 = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

$$81 = 3^{-y}$$

$$y = -4$$

تمرین
کلاس

۱- نشان دهید که:

$$1) \log_4^{16} = 2$$

$$2) \log_{\frac{1}{2}}^{2^7} = -3$$

۲- مقدار \log_5^6 و $\log_{\frac{1}{6}}^5$ را محاسبه کنید. در حالت کلی $a > 0$ و $a \neq 1$ و \log_a^a را محاسبه

و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه a مساوی است.

۳- در عبارت‌های زیر y را بیابید.

الف) $\log_4^1 = y$ ب) $\log_4^4 = y$ ج) $\log_{1/6}^{3/6} = y$ د) $\log_{1/6}^{3/6} = y$

معادله‌ی لگاریتمی

عبارت‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند.

۱) $\log_3^x = 2$ ۲) $\log_3^x = \log_3^5$
 ۳) $\log_3^x + \log_3^5 = 4$ ۴) $\log_3^{(x+1)} + \log_3^x = \log_3^6$

منظور از حل معادله‌ی لگاریتمی یافتن مقدار و یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق کند.



معادلات لگاریتمی زیر را با توجه به تعریف لگاریتم حل می‌کنیم.

$\log_3^x = 2$ $\log_5^x = -1$
 $x = 10^2$ $x = 5^{-1}$
 $x = 100$ $x = \frac{1}{5}$



معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\log_3^x = 4$ ۲) $\log_3^{(x-1)} = -1$ ۳) $\log_{1/4}^x = \frac{1}{4}$

در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قرار دارد. برای ادامه حل به مفهوم زیر نیاز داریم:

- اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد آن‌گاه از تساوی $\log_a^x = \log_a^z$ می‌توان تساوی $x = z$ را نتیجه گرفت و بالعکس.

$$۱) \log_2^x = \log_2^{\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$۲) \log_5^{(2x-1)} = \log_5^x$$

$$2x - 1 = x$$

$$x = 1$$

$$۳) \log_7^{(x^2-2)} = \log_7^x$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$۴) \log_5^x = \log_5^7$$

$$x = 7$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = 2, x = -1$$

در مثال شماره ۳، $x = -1$ قابل قبول نیست زیرا لگاریتم برای اعداد مثبت تعریف می‌شود. به بیان دیگر $x = -1$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌های معادله‌ی فوق نیست.

معادلات زیر را حل کنید: (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

$$۱) \log_3^{(x^2-15)} = \log_3^{2x}$$

$$۲) \log_1^{(x^2-3^0)} = \log_1^x$$

$$۳) \log_x^{16} = 2$$

قوانین (قضایا) لگاریتم‌ها

هنگام حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، پزشکی، زمین‌شناسی و ... که در آن‌ها معادلات لگاریتمی به کار رفته است نیازمند استفاده از قوانینی که بین لگاریتم‌ها برقرار است می‌شویم. به همین جهت در این بخش به بیان و اثبات این قوانین می‌پردازیم.

از قوانین داریم: $16 \times 128 = 2^4 \times 2^7 = 2^{4+7}$
 می‌خواهیم ببینیم که آیا درباره لگاریتم‌ها نیز می‌توان نوشت: $\log_2^{2^4 \times 2^7} = \log_2^{2^4} + \log_2^{2^7}$
 دو طرف تساوی را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\log_2^{16 \times 128} = \log_2^{2^4 \times 2^7} = \log_2^{2^{11}} = y \quad \log_2^{2^4} = a \quad \log_2^{2^7} = b$$

$$2^{11} = 2^y \quad \text{مطابق تعریف لگاریتم} \quad 2^4 = 2^a \quad 2^7 = 2^b$$

$$y = 11 \quad a = 4 \quad b = 7$$

بنابراین: $\log_2^{2^4} + \log_2^{2^7} = a + b = 4 + 7 = 11$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که برای اعداد حقیقی و مثبت c, b, a که $(c \neq 1)$ همین

رابطه برقرار است یعنی:

$$\log_c^{a \cdot b} = \log_c^a + \log_c^b \quad \text{قضیه ۱}$$

فرض کنیم $\log_c^{ab} = p$ ، از تعریف لگاریتم داریم $ab = c^p$

$$\log_c^b = n, \log_c^a = m$$

$$b = c^n, a = c^m$$

$$ab = c^m \times c^n = c^{m+n}$$

$$ab = c^p$$

$$ab = c^{m+n}$$

بنابراین: $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$ یا $c^p = c^{m+n}$



$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} + \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = 1$$

قضیه‌ی ۲: برای هر عدد حقیقی مثبت c, b, a که $(c \neq 1)$ است می‌توان ثابت کرد که:

$$\log_{\frac{a}{c}}^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

به عنوان مثال برای محاسبه‌ی $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}}$ می‌توان نوشت:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} = \log_{\frac{1}{2}}^1 - \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0 - 1 = -1$$

از اینکه $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} = 1/4650$ و $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{8}} = 2/7268$ است، استفاده می‌کنیم و $\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}$ را محاسبه می‌نماییم.

$$\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{5}} = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{8}} - \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{5}} = 1/2618$$

می‌توان ثابت کرد که رابطه‌ی $\log_c^{a^n} = n \log_c^a$ برای اعداد کسری و گنگ نیز صادق است یعنی می‌توان نوشت:

$$\log_c^{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \log_c^a \quad \text{و} \quad \log_{\sqrt[n]{a}}^{\sqrt[n]{a}} = \log_{\sqrt[n]{a}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_{\sqrt[n]{a}}^1 = \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n}$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^{(\sqrt{2})^2} + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^2 + \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}^1 = 1$$

۱- درستی تساوی $\log_c^{abd} = \log_c^a + \log_c^b + \log_c^d$ را تحقیق کنید. (a و b و c و d اعداد

حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ است.)

۲- از تساوی $a^n = \underbrace{a.a \dots a}_{n \text{ بار}}$ استفاده کنید و رابطه‌ی $\log_c^{a^n} = n \log_c^a$ را نتیجه بگیرید.

۳- نشان دهید که: $\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} = 5 \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{25}}$

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید :

۱) $\log_1^{\circ\circ}$ ۲) $\log_1^{\circ\circ}$ ۳) $\log_1^4 + \log_1^{25}$ ۴) $2 \log_1^4 + \log_1^4$

۵- اگر $\log_3^m = n$, $\log_3^n = m$ باشد عبارات زیر را محاسبه کنید : (برحسب n,m)

۱) $\log 18$ ۲) $\log_3^{22} + \log_3^{27}$

۶- از این که $\log_4^2 = 0.5$ است استفاده کنید و \log_4^{32} را محاسبه کنید.

۷- ثابت کنید $\log_c^{a^x} = x \log_c^a$ و $c, a, x \in \mathbb{R}$ اعداد حقیقی مثبت (راهنمایی : فرض کنید

$$(\log_c^a = n, \log_c^{a^x} = m)$$

- قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

(راهنمایی : فرض کنید $\log_c^{\frac{a}{b}} = m$, $\log_c^a = n$, $\log_c^b = p$ از قوانین توان‌ها استفاده کنید.)

۸- حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

۱) \log_2^{16} ۲) $\log_7^{\frac{1}{49}}$ ۳) $\log_2^{\sqrt{8}}$ ۴) $\log_3^{54} - \log_3^2$

۵) $2 \log_1^5 + \log_1^4$ ۶) $2 \log_1^2 + \log_1^{25}$

۷) $\log_1^{24} - \frac{1}{4} \log_1^9 + \log_1^{25}$ ۸) $3 \log_1^{\sqrt{4}} - \log_1^{25}$

حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها

از قوانین لگاریتم‌ها استفاده کرده و مثال‌هایی از معادلات لگاریتمی را حل می‌کنیم.

مثال

۱) $3 \log_5^x - \log_5^4 = \log_5^6$

$$\log_5^{x^3} - \log_5^4 = \log_5^6$$

$$\log_5^{\frac{x^3}{4}} = \log_5^6 \Rightarrow \frac{x^3}{4} = 6 \Rightarrow x^3 = 24 \Rightarrow x = 2$$

اگر در معادله‌ی اصلی به جای x عدد ۴ را قرار می‌دهیم :

$$3 \log_5^4 - \log_5^4 = \log_5^{16}$$

$$2 \log_5^4 = \log_5^{16}$$

بنابراین جواب $x=4$ قابل قبول است.

۲)

$$\log_3^x + \log_3^{(2x+1)} = 1$$

$$\log_3^{x(2x+1)} = 1$$

$$2x^2 + x = 3^1$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = 1, x = -\frac{3}{2}$$

جواب‌ها را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم :

$$\log_3^1 + \log_3^3 = 1$$

$$\log_3^{(-\frac{3}{2})} + \log_3^{\frac{3}{2}(-3+1)} = 1$$

توجه کنید که $x = -\frac{3}{2}$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌ها نیست و بنابراین جواب قابل قبول برای معادله‌ی لگاریتمی نیست. بنابراین تنها جواب $x=1$ در معادله‌ی اصلی صدق می‌کند.

مسائل

۱- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_9^x = \frac{3}{2}$

۲) $\log_8^{(x+1)} = \frac{1}{2}$

۳) $\log_1^{(4-x)} = \log_1^{(6-x)} - \log_1^x$

۴) $\log_7^5 + \log_7^x = \log_7^{10}$

۵) $\log_6^a + \log_6^9 = \log_6^{27}$

۶) $\log_1^6 - \log_1^{2x} = \log_1^2$

۷) $\log_5^{24} - \log_5^{(x+5)} = \log_5^4$

۸) $\log_2^n = \frac{1}{4} \log 16 + \log 49$

۹ و ۱۰ را بر حسب n حل کنید.

$$۹) \log_a^{f^n} - ۲ \log_a^x = \log_a^x$$

$$۱۰) \log_b^a + ۳ \log_b^n = ۳ \log_b^{(x-1)}$$

$$۱۱) \log_5^z + \log_5^{(z+۳)} = ۱$$

$$۱۲) \log_6^{(a^x+۲)} + \log_6^2 = ۲$$

$$۱۳) \log_7^{(t+۲)} + \log_7^{(t-۲)} = ۱$$

$$۱۴) \log_7^x + \log_7^{(x-۶)} = ۲$$

$$۱۵) \log_{\frac{1}{10}}^{(x^7-1)} = -۱$$

۲- برای هر عدد حقیقی و مثبت که c, b, a, x که (c ≠ ۱) است ثابت کنید.

$$۱) \log_c^{\frac{1}{x}} = -\log_c^x$$

$$۲) \log_c^a = \frac{\log_e^a}{\log_e^c}$$

$$۳) c^{\log_c^a} = a$$

۳- با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها یا هر راه حل دیگر نشان دهید که:

$$۱) \log_7^3 \times \log_7^{2^7} = ۱$$

$$۲) \log_7^{2^9} = ۲ \log_7^9 = ۲$$

$$۳) \log_7^{(\log_7^{\log_7^a})} = ۰$$

۴- کدام راه حل درست و کدام یک نادرست است؟ استدلال کنید.

$$۱) \log_3^x = ۹$$

$$۲) \log_3^x = ۹$$

$$3^x = ۹$$

$$x = 3^9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 19 \cdot 83$$

$$x = 2$$

۵- آیا راه حل زیر درست است؟

استدلال کنید.

$$\log_{\frac{1}{10}}^{(2^x-1)} = ۰$$

$$\log_{\frac{1}{10}}^{2^x} - \log_{\frac{1}{10}}^1 = ۰$$

$$\log_{\frac{1}{10}}^{2^x} - ۰ = ۰$$

$$2^x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

۶- معادله ی $\log_{\frac{1}{10}}^{(x+۲)} = \log_{\frac{1}{10}}^a - \log_{\frac{1}{10}}^{(x-۵)}$ را حل کنید.

چگونه می‌توانید از درستی جواب به‌دست آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع $y = \log_x^x$ نمودار تابع $y = \log_4^{(x+1)}$ و تابع معکوس آن را رسم کنید.

خواندنی

غلظت یون هیدرونیوم که آن را با $[H_3O^+]$ نشان می‌دهند در بافت زنده و نیز در خاکی که گیاهان در آن رشد می‌کنند عامل مهمی است. محلول‌های اسیدی غلظتی زیاد دارند که از حدود 10^{-2} مول بر لیتر تا 10^{-7} مول بر لیتر تغییر می‌کند. برای آب مقطر غلظت یون هیدرونیوم تقریباً 10^{-7} مول بر لیتر است. این غلظت را خنثی می‌نامند. غلظت پایین‌تر تا تقریباً 10^{-12} مول بر لیتر دلالت بر محیط قلیایی یا بازی دارد. در شیمی برای تعیین میزان اسیدی یا قلیایی بودن یک محلول از رابطه‌ی لگاریتمی زیر استفاده می‌کنند.

$$pH = -\log_{10} [H_3O^+]$$

(پتانسیل هیدروژن)

$pH = 7$ بیان‌گر محلول خنثی و $pH < 7$ نشان دهنده‌ی اسیدی بودن محیط است در

حالی که $pH > 7$ از قلیایی بودن محیط حکایت می‌کند.

درمورد مغز انسان کشف کرده‌اند که غلظت یون هیدرونیوم یعنی $[H_3O^+]$ در مایع نخاعی

مغزی $4/8 \times 10^{-8} \text{ mol/Lit}$ است. بنابراین pH آن عبارت است از:

$$pH = -\log_{10} [H_3O^+] = -\log_{10} 4/8 \times 10^{-8} = -\log_{10} 4/8 + \log_{10} 10^{-8} = -(0.68 - 8) = 7$$

بنابراین محیط مایع نخاعی مغزی نه اسیدی و نه چندان قلیایی است.

در این‌جا pH چند محلول که با آن آشنا هستید داده شده است.

pH	
۱	اسید باتری
۴/۲	گوجه‌فرنگی
۶/۴	شیر
۷	آب مقطر
۷/۸	تخم مرغ

- غلظت یون هیدرونیوم در سه محلول الف و ب و ج به ترتیب $[H_3O^+] = 3/7 \times 10^{-5}$ مول بر لیتر، $[H_3O^+] = 8/1 \times 10^{-8}$ مول بر لیتر و $[H_3O^+] = 0/27 \times 10^{-7}$ است. در هر مورد pH را به دست آورید.

- کاغذ لیتموس یک وسیله شناسایی است و رنگ طبیعی آن صورتی است که در محیط اسیدی قرمز و در محیط قلیایی آبی می‌شود. رنگ کاغذ لیتموس در محلولی که غلظت یون هیدرونیوم در آن $[H_3O^+] = 4 \times 10^{-9}$ است قرمز می‌شود یا آبی؟ در محلولی که $[H_3O^+] = 0/00002$ است چگونه؟

- زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش و جنبش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. محلی که منشأ زلزله از آنجا شروع شده و انرژی از آن خارج می‌شود را کانون زلزله و نقطه‌ی بالای کانون در سطح زمین را مرکز زلزله می‌گویند.

بزرگی زمین لرزه از رابطه لگاریتمی $\log E = 11/4 + 1/5 M$ به دست می‌آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ است. رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که با افزایش یک درجه‌ای M مقدار انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می‌گردد. انرژی یک زلزله‌ی ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده‌ی انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

$$\log E = 11/4 + 1/5 \times 8 = 23/4 \Rightarrow E = 10^{23/4}$$

زلزله‌ها از جنبه‌ی آزاد شدن انرژی به دو صورت افقی و عمودی تقسیم‌بندی می‌گردند. خرابی‌های عمده و وسیع معمولاً بر اثر زلزله‌هایی از نوع افقی صورت می‌گیرد.

البته باید توجه داشت که میزان انرژی رسیده به هر نقطه از سطح زمین علاوه بر میزان انرژی آزاد شده در مرکز به مجموعه عواملی از قبیل فاصله از مرکز زلزله، جنس خاک، مقاومت بنا و ... بستگی دارد.

زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقه‌ی رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزاد شده در مرکز زلزله را تخمین بزنید.

همچنین بزرگی زلزله‌ی بم در سال ۱۳۸۲، ۶/۶ ریشتر گزارش شده است. میزان انرژی آزاد شده در این منطقه را تخمین بزنید.