فصل اول

اعداد و نمادها

نگاه کلی به فصل اول

اهداف کلی

۱- یادآوری و تعمیق مفهوم اعداد طبیعی, صحیح, گویا, و حقیقی

۲- تفکیک غیرمستقیم بین نمایشها و مفهوم یک عدد از طریق ارائه نمایشهای مختلف برای یک عدد.

۳- تعبیر هندسی مفاهیم عددی از طریق محور اعداد, طول پاره خطها, و مساحت شکلها

۴- شناخت تقریب های اعشاری یک عدد حقیقی

۵- آشنایی با قدر مطلق اعداد حقیقی به طور هندسی

۶- معرفی نقش نمادهای حرفی(لاتین) به عنوان نشانه و نماینده یک عدد دلخواه

۷- استفاده از نمادها برای ساختن جملات ریاضی و کسب آمادگی برای انجام محاسبات نمادین

۸- ارائه تعبیر هندسی از عبارت های نمادین

۹- ترجمه جملات از زبان فارسی به زبان ریاضی و برعکس

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

۱- یک عدد را به شکلهای مختلف نمایش دهند.

۲- نمایش دهدهی اعداد را به عنوان نشانه اعداد خاص و نمادهای حرفی(لاتین) را به عنوان نشانه عدد دلخواه بشناسند.

۳- اعداد گویا را به عنوان تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی بشناسند.

۴- تشخیص دهند بین هر دو عدد گویا, عدد گویای وجود دارد.

۵- اعداد اعشاری را در میان اعداد گویا مشخص کنند.

۶- قسمت صحیح و قسمت اعشاری, اعداد اعشاری مثبت را بشناسند و محاسبه کنند.

۷- نقاط روی محور اعداد را به عنوان نقاط نظیر اعداد حقیقی بشناسند و مکان اعداد خاص روی محور اعداد را مشخص کنند.

۸- مفهوم تقریب اعشاری اعداد حقیقی را بشناسند و تقریب های اعشاری اعداد گویا را به دست آورند.

۹- تعبیر هندسی قدر مطلق را روی محور اعداد نشان دهند و قدرمطلق اعداد داده شده را بنویسند.

۱۰- بین اعمال جبری و نمایشهای هندسی ارتباط برقرار کنند.

۱۱- با نمادها, جملات ریاضی را بیان کنند و جملات ریاضی را به زبان فارسی بیان کنند و معنی آن را توضیح دهند.

۱۲- خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع را بنویسند و تعبیر هندسی کنند و از طریق آن فاکتورگیری را تشخیص دهند.

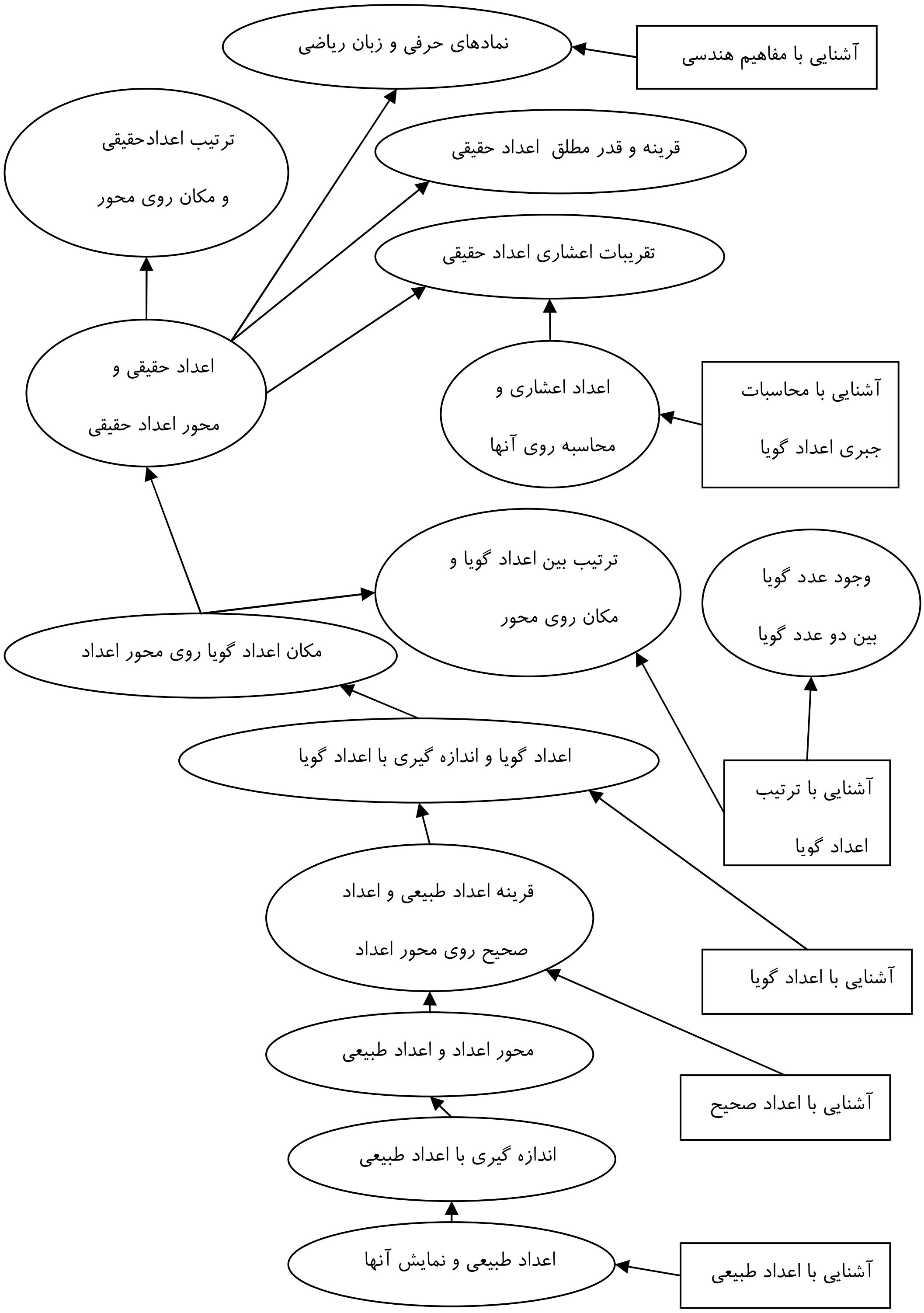
پیشنیازها

برای ورود به این فصل, لازم است دانش آموزان آشنایی کافی با اعداد و محور اعداد و محاسبات جبری با اعداد داشته باشند. از معلومات هندسی مربوط به دوره ابتدایی و راهنمایی مانند رابطه فیثاغورس نیز در این فصل استفاده می شود.

زمانبندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می شود این فصل در ۳ هفته تدریس شود.

طرح کلی مفاهیم فصل اول



مستطیلها پیشنیازها را نشان می دهند و بیضی ها مفاهیم موجود در فصل را نشان می دهند.

آموزش بخشهای فصل اول

بخش اعداد طبیعی

اهداف بخش:

- درک مفهوم اعداد طبیعی به عنوان تعداد اشیا
- درک نمایش دهدهی اعداد طبیعی به عنوان نمایشی از اعداد

توضیحات: مفهوم عدد طبیعی همان تعداد عناصر یک دسته از اشیا است و نمایش دهدهی اعداد طبیعی ، دنباله‌ای از ارقام است که نشانه‌ی آن اعداد است. اگر نمایش دهدهی اعداد را به عنوان سمبل و نشانه‌ی اعداد خاص معرفی کنیم، دانش‌آموزان آماده می‌شوند تا در بخش نمادها ، بپذیرند که یک نماد حرفی(لاتین) نیز می تواند سمبل و نشانه‌ی یک عدد دلخواه باشد.

پیشنیازها:

آشنایی با اعداد طبیعی و نمایش دهدهی اعداد طبیعی.

واژه های کلیدی:

اعداد طبیعی – نمایش های مختلف اعداد طبیعی – نمایش دهدهی

نگاه کلی به بخش:

در کتاب فقط به مفهوم اعداد طبیعی و نمایش آنها اشاره شده است و معلمان با توجه به سطح دانش آموزان می توانند توضیحات بیشتری در این مورد ارائه کنند. در صورت امکان معلمان می توانند قسمت خواندنیهای این بخش از کتاب را مطالعه کنند و از طریق آن تمایز بین مفهوم عدد و نمایش عدد را آموزش دهند.

ورود به مطلب:

مناسب است که ابتدا یک عدد طبیعی خاص را در زبانهای گوناگون نوشت و این سوال را طرح کرد که این علامتها چه چیزی را نشان می دهند؟ آیا همه مردم, اعداد را مانند هم نمایش می دهند؟ آیا نمایش اعداد در قدیم هم مانند امروز بوده است؟ با مقداری کار کردن روی نمایشهای گوناگون اعداد طبیعی به ویژه نمایش اعداد طبیعی در مبناهای مختلف دانش آموزان را غیر مستقیم به این نکته می رسانیم که این علامتها که روی کاغذ یا تخته می نویسیم نشانه و سمبل اعداد خاص هستند. با این روش بعدا می خواهیم نمادهای حرفی(لاتین) را نشانه و سمبل اعداد دلخواه در نظر بگیریم. البته عمیق شدن در این مفاهیم کار را پیچیده می کند و لزومی ندارد در این مطالب عمیق وارد شوید.

ارزیابی یادگیری:

از دانش آموزان بخواهید یک عدد خاص را به چند شکل مختلف نمایش دهند.

محدوده مطالب:

هدف این بخش فقط درک این نکته است که یک عدد را می توان به شکلهای مختلف نمایش داد و به آن اشاره کرد تا در بخشهای بعدی نمادهای حرفی(لاتین) را برای اشاره به یک عدد دلخواه بکار بریم. بنابراین لزومی ندارد وارد جزئیات عدد نویسی با روشهای مختلف شویم. آموزش روش عدد نویسی با روشهای دیگر مورد نظر نیست.

سطح بالاتر:

اگر دانش آموزان توانایی کار بیشتری را دارند می توانید روی بخش خواندنیها در کلاس کار کنید. تفکیک بین عدد و نشانه‌ی عدد کار آسانی نیست، زیرا مفهوم عدد ، امری ذهنی است و هر دانش‌آموزی برای خود آن را می‌سازد. اما نشانه‌ی عدد، علاماتی هستند که روی کاغذ آورده می‌شوند و به سادگی می‌توان درباره‌ی آن‌ها حرف زد. روش کتاب ، آشنا کردن دانش‌آموزان با انواع و اقسام نشانه‌ها و نمایش‌هایی است که برای اعداد به کار رفته است . وقتی یک عدد را به طریق‌های

گوناگون نمایش دهیم، دانش‌آموز به طور غیرمستقیم درک خواهد کرد که تمامی این‌ها نشانه‌گذاری و نمایش‌دهی برای یک مفهوم هستند و خود مفهوم با این نمایش‌ها متفاوت است.

اگر دانش‌آموزان توانایی بیشتری در درک مطالب دارند، می‌توانید از اصطلاح «نام» استفاده کنید و هرگونه نمایشی از یک عدد را یک «نام» برای آن عدد درنظر بگیرید. بنابراین یک عدد می‌تواند نام‌های گوناگونی داشته باشد.

در این‌حالت می‌توانید وضعیت وجود نام‌های متفاوت برای یک عدد را با وضعیت وجود نام‌های مختلف برای یک فرد انسانی مقایسه کنید و نتیجه‌گیری کنید که همان‌گونه که یک فرد غیر از نام آن فرد است ، اعداد نیز غیر از نام‌های آن‌ها هستند.

بخش اندازه‌گیری با اعداد طبیعی

اهداف بخش:

- مرتبط کردن مفهوم اعداد طبیعی و اعمال جبری روی آنها با مفاهیم هندسی پاره‌خط و مساحت .

پیشنیازها:

آشنایی با مفهوم اندازه گیری به صورت شمارش واحدها – آشنایی با خط و پاره خط

ارتباط با سایر بخشها:

این بخش, مقدمه ارائه تعبیر هندسی از مفاهیم جبری و ساختن و استفاده از محور اعداد و دستگاه مختصات است که برای تعبیر هندسی مفاهیم جبری در بخشهای بعدی کتاب ضروری است.

واژه های کلیدی:

اندازه گیری – واحد اندازه گیری – شمارش – خط و پاره خط

نگاه کلی به بخش :

نمایش هندسی مفاهیم جبری یکی از روش‌های اصلی این کتاب است . از آن‌جا که مفاهیم هندسی، قابلیت شهود بیشتری دارند, معنای روشنتری دارند و از طریق مرتبط کردن مفاهیم جبری و هندسی ، می‌توان درک بهتر و معنای روشن‌تری برای

مفاهیم جبری ایجاد کرد.

اندازه‌گیری، روش اصلی برای مرتبط کردن مفاهیم جبری و هندسی است, اما خود اندازه‌گیری هدف اصلی این کتاب نیست. با استفاده از یک پاره‌خط واحد ، طول برخی از پاره‌خط‌ها با اعداد طبیعی قابل بیان است. مناسب است که جمع اعداد طبیعی با کنار هم‌گذاردن پاره‌خط‌ها و ضرب اعداد طبیعی با مساحت مستطیل‌ها مرتبط شوند.

این بخش بیشتر جنبه یادآوری دارد و دانش آموزان قبلا با این مفاهیم آشنایی دارند.

ورود به مطلب:

این بخش را می توان با طرح این سوالات آغاز کرد. دو پاره خط را از لحاظ طول چگونه می توان مقایسه کرد؟ مساحت دو شکل را چگونه می توان مقایسه کرد؟ اندازه طول یا مساحت را چگونه می توان به دست آورد؟ از آنجا که این فصل جنبه یادآوری دارد مستقیما می توانید دانش آموزان را به روابط طول و مساحت شکلها برسانید.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب, می توانید طول چند پاره خط و مساحت را به طور عملی حساب کنید. در این بخش یک ***تمرین در کلاس*** طرح شده است که هدف از آن درگیر دانش آموز در محاسبه طولها و مساحتها و اندازه گیری آنها و مقایسه آنها است. این تمرین به شکل زیر حل می شود.

تمرین در کلاس صفحه ۵

بند(۱): کلیه این مستطیلها دارای عرض و طول به شکلهای (۱،۹) , (۲،۸) , (۳،۷) , (۴،۶) , (۵،۵) هستند.

بند(۲): پنج مستطیل رسم شده است و مساحتهای آنها عبارتند از: ۹ , ۱۶ , ۲۱ , ۲۴ , ۲۵

بند(۳): مستطیلی که طول و عرض آن مساوی ۵ است, در واقع مربعی به طول ۵ است و بیشترین مساحت را دارد.

محدوده مطالب:

اندازه‌گیری ، هدف اصلی این کتاب نیست و در مورد اندازه‌گیری لزومی به طرح انواع واحدهای اندازه‌گیری نیست . می‌توانید از یک واحد اندازه‌گیری ثابت ، مانند سانتی‌متر و سانتی متر مربع استفاده کنید.

سطح بالاتر:

در مورد چگونگی رابطه بین جمع و ضرب اعداد طبیعی, و کنار هم گذاردن پاره‌خط‌ها و مساحت مستطیل‌ها می‌توان سخنان بیشتری گفت و سعی کرد اثباتی برای درستی این ارتباط پیدا کرد. شرط لازم برای ارائه‌ی یک استدلال درست، درک دقیق اعداد طبیعی به عنوان تعداد اشیاء و یافتن تعداد اشیاء با شمارش, و درک دقیق مفاهیم جمع و ضرب اعداد طبیعی است. شما می توانید استدلالهایی به دست آورید که نشان دهد با به دنبال هم گذاردن دو پاره خط به طولهای m و n طول پاره خط به دست آمده برابر است با $m+n$. همچنین مساحت مستطیلی با طول و عرض m و n برابر است با mn . این استدلالها می تواند فقط مبتنی بر شمارش تعداد پاره خطهای واحد برای تعیین طول و مربعهای واحد برای تعیین مساحت باشد.

بخش اعداد صحیح

اهداف بخش:

- یادآوری مفهوم اعداد صحیح و محور اعداد و مکان اعداد صحیح روی محور اعداد
- یادآوری قرینه اعداد صحیح و مقایسه بین اعداد صحیح روی محور اعداد

پیشنیازها:

آشنایی با مفهوم اعداد صحیح و محور اعداد و مکان اعداد صحیح روی محور اعداد

واژه های کلیدی:

اعداد صحیح – محور اعداد – مکان اعداد روی محور

نگاه کلی به بخش :

ارائه‌ی اعداد صحیح نیازمند مفهوم جهت است . فقط در کمیت‌هایی که جهت‌دار هستند، می‌توان اعداد منفی را نشان داد. در کتاب از محور استفاده شده است که خطی جهت‌دار است.

استفاده از عملیات هندسی و حرکت روی محور در جهت مثبت و خلاف جهت مثبت ، روش اصلی کتاب برای معنادار کردن اعداد صحیح و یافتن یک درک ملموس از آن است. با این روش, اعداد صحیح منفی و اعداد طبیعی به صورت نقاط قرینه هم روی محور اعداد دیده می شوند.

در مورد قوانین جمع و ضرب اعداد صحیح در کتاب صحبتی نشده است، زیرا قبلاً در دوره‌ی راهنمایی آن‌ها را آموخته‌اند . از آن‌جا که در این قوانین برخی ابهامات ممکن است وجود داشته باشد، در صورتی‌که دانش‌آموزان نیازمند توجیه بیشتری نسبت به این قوانین هستند و وقت کافی وجود دارد ، می‌توانید این قوانین را از طریق یافتن الگوها توجیه کنید. مثلاً با تکمیل الگوهای زیر قوانین ضرب اعداد صحیح را توجیه کنید.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2\times 3 & 2\times 2 & 2\times 1 & 2\times 0 & 2\times(-1) & 2\times(-2) \\ \hline & 6 \to & 4 \to & 2 \to & 0 \to & ? \to & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{|cccccc} (-2)\times 3 & (-2)\times 2 & (-2)\times 1 & (-2)\times 0 & (-2)\times(-1) & (-2)\times(-2) \\ \hline -6 \to & -4 \to & -2 \to & 0 \to & ? \to & ? \end{array}$$

توجه کنید که اگر تعریف جمع و ضرب اعداد صحیح را به گونه ای انجام دهیم که این الگوها حفظ شوند, غیرمستقیم نتیجه می‌شود که خواص اساسی جمع و ضرب اعداد طبیعی ، مجدداً در اعداد صحیح نیز، به همان شکل برقرار بمانند.

ورود به مطلب:

این بخش را می توان با طرح پرسش از مفهوم اعداد منفی و علت نیاز به اعداد منفی آغاز کرد. به ویژه می توان مسائلی طرح کرد که از طریق اعداد منفی قابل حل باشد. مانند مسائلی که جواب آنها عدد منفی باشد.

مثلا فردی را مطرح کنید که ماهیانه درآمدهایی دارد و مخارجی دارد. اگر این فرد درآمدهای خود را برای مخارج خود صرف کند چقدر پول خواهد داشت؟ اعداد را به گونه ای تنظیم کنید که جواب عدد منفی شود.

از اندازه گیری درجه حرارت و ارتفاع هر مکان از سطح دریا نیز می توان استفاده کرد و دلیل به وجود آمدن و نیاز به اعداد منفی را توجیه کرد.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب, محور اعداد توضیح داده می شود. در این بخش یک ***تمرین در کلاس*** وجود دارد که هدف از آن ارزیابی یادگیری دانش آموزان از محور اعداد و مکان اعداد است.

تمرین در کلاس صفحه ۶

این تمرین از طریق رسم محور و یافتن نقاط روی محور اعداد باید حل شود. برای B دو نقطه قابل قبول است که یکی از این نقاط روی نیم خط منفی قرار می گیرد. و تنها جواب نقطه نظیر عدد ۱۰ است.

در آخر این بخش در صفحه ۷ دو مسئله آمده است که اولی محاسبات با اعداد صحیح و دومی یک مسئله با توصیف کلامی است که دانش آموزان باید بتوانند آن را به روابط ریاضی برگردانند و نتیجه را به طور کلامی توضیح دهند. در این مسئله هزینه سالانه این خانواده برابر است با $350000\times12=4200000$. این مقدار, از درآمد خانواده بیشتر است و خانواده با کمبود بودجه روبرو است.

تذکر: با وجود سادگی این مسئله, لازم است معلمین آن را توضیح دهند، زیرا در حل آن یک روند قابل توجه وجود دارد. در این مسئله با ابزار ریاضی ساده ، مراحل استخراج اطلاعات از کلام ، محاسبات و تفسیر جواب طی می شود که در حل مسائل واقعی بسیار مهم است. حل این گونه مسائل از اهداف اصلی این کتاب است.

ارزیابی یادگیری:

اعداد صحیح همان اعداد طبیعی و قرینه اعداد طبیعی به همراه صفر هستند، بنابراین اگر دانش‌آموزان بدانند که در هنگام محاسبه با اعداد صحیح با علامت آن‌ها چگونه رفتار کنند، یادگیری آن‌ها کافی است . برای این‌کار انجام چند نمونه محاسبه که کلیه حالات علامت اعداد صحیح را در بر بگیرد مناسب است. همچنین برای مقایسه درست اعداد صحیح, باید حالات مختلف نامساوی بین اعداد صحیح مثبت و منفی ارائه شود. برای آزمون درک مکان اعداد صحیح منفی روی محور , توانایی مکان‌یابی اعداد صحیح روی محور کافی است.

محدوده مطالب:

در این قسمت فقط توانایی دانش آموز برای محاسبه با اعداد صحیح و دانستن مکان آنها روی محور مطرح است و لزومی به طرح مسائل دیگر نیست.

بخش اعداد گویا

اهداف بخش:

- نمایش هندسی اعداد گویا از طریق تقسیم‌بندی یک پاره‌خط
- نمایش جبری اعداد گویا از طریق تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی
- مقایسه اعداد گویا و تعبیر هندسی رابطه‌ی ترتیب اعداد گویا (از طریق محور اعداد که عدد کوچکتر سمت چپ عدد بزرگتر قرار می‌گیرد.)
- وجود عدد گویا بین هر دو عدد گویا

توضیحات: با تقسیم پاره خطها می توان اعداد گویای مثبت را به عنوان طول برخی پاره‌خط‌ها ارائه کرد و روی محور اعداد مکان‌هایی را برای اعداد گویای مثبت و منفی پیدا کرد.

از این که ، می‌توان بین هر دو عدد گویا, عدد گویای دیگری پیدا کرد نتیجه می شود محور اعداد از اعداد گویا پر می‌شود, بنابراین نمی‌توان اعداد گویای متوالی پیدا کرد. با استفاده از این مطلب می توان به طرح این سوال پرداخت که آیا نقطه ای روی محور وجود دارد که مربوط به اعداد گویا نباشد؟

پیشنیازها:

آشنایی با اعداد گویا – تعبیر هندسی تقسیم یک عدد بر یک عدد طبیعی به صورت تقسیم یک پاره خط به چند قسمت مساوی – آشنایی با ترتیب بین اعداد گویا و چهار عمل اصلی روی آنها

واژه های کلیدی:

اعداد گویا – مکان اعداد گویا روی محور اعداد – مقایسه بین اعداد گویا – جمع و ضرب اعداد گویا

نگاه کلی به بخش :

در کتاب، ابتدا این نکته تذکر داده می‌شود که اعداد صحیح برای اندازه‌گیری بسیاری از کمیت‌ها کافی نیستند. در اینجا منظور کمیت های پیوسته هستند که نمی‌توان همه‌ی آن‌ها را با اعداد طبیعی یا صحیح نشان داد . به عنوان مثال، از پاره‌خط استفاده شده است و مستقیماً با توجه به اطلاعات قبلی دانش‌آموز، یک عدد گویای مثبت با تقسیم یک پاره‌خط به چند قسمت مساوی نمایش داده شده است.

در این‌جا همزمان ، هم معنای هندسی اعداد گویای مثبت به عنوان طول برخی پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، و هم معنای جبری اعداد گویای مثبت که به صورت تقسیم دو عدد طبیعی هستند دیده می‌شود.

با استفاده از این تعبیر هندسی، مکان اعداد گویای مثبت و منفی روی محور تعیین می‌شود تا تعبیر اعداد گویا به عنوان نقاطی روی یک محور کامل شود. قوانین جمع و ضرب اعداد گویا دانسته فرض شده است و شیوه ارتباط اعمال جمع و ضرب اعداد گویای مثبت با عملیات پهلوی هم گذاری پاره‌خط‌ها و مساحت مستطیل‌ها مورد بحث قرار نگرفته است ولی طرح آن در کلاس توسط معلمان مناسب است.

تعبیر هندسی رابطه نامساوی بین اعداد گویا مستقیما گفته می‌شود و شیوه‌ی تشخیص جبری نامساوی بین اعداد گویا مورد بحث قرار می‌گیرد. طی یک فعالیت شیوه ساختن عد گویا بین دو عدد گویای داده شده برای دانش‌آموز تشریح می‌شود و نتیجه‌گیری مهم آن در مورد تعداد اعداد گویای بین دو عدد گویا مطرح می‌شود . این مطلب بهتر است در سر کلاس بحث شود و نتیجه آن را به طریق هندسی توصیف کنید. نتیجه بگیرید که اعداد گویا به طور متوالی پشت سر هم قرار نگرفته اند و اعداد گویا تقریبا همه جای محور اعداد حضور دارند.

ورود به مطلب:

برای طرح اعداد گویا , می توان پاره خطی را عرضه کرد که بر حسب پاره خط واحد طول صحیح (و اعشاری) نداشته باشد و

سعی کنیم تا طول آن را اندازه گیری کنیم. در این تلاش می توان اعداد گویا را مطرح کرد و همزمان علت پیدایش آنها را توجیه کرد.

برای طرح مفهوم نامساوی و مقایسه بین اعداد گویا می توان از مقایسه طول پاره خطها شروع کرد و از آن رابطه نامساوی بین اعداد گویا را ارائه کرد.

برای تشخیص نامساوی بین اعداد گویا از طریق جبری, می توانید از تعبیر هندسی اعداد گویا شروع کنید و ابتدا اعداد گویای با مخرج یکسان را مقایسه کنید, و سپس حالت کلیتر را بررسی کنید. برای بررسی حالت کلیتر مخرجهای دو عدد گویای داده شده را با ضرب کردن صورت و مخرج هر یک در مخرج دیگری یکسان کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. با این روش قاعده طرفین وسطین برای مقایسه اعداد گویایی که مخرج آنها عدد طبیعی باشد شرح دهید.

برای وارد شدن به مطلب وجود اعداد گویا بین دو عدد گویای داده شده, می توانید دو عدد گویای نزدیک به هم مثال بزنید و این پرسش را مطرح کنید که آیا عدد گویایی بین آنها وجود دارد؟

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب و یادآوری چگونگی و تعبیر هندسی اعداد گویا و عملیات جبری روی اعداد گویا و نامساوی بین آنها, به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف از آن تمرین در تشخیص نامساوی بین اعداد گویا از طریق هندسی و جبری است.

تمرین در کلاس صفحه ۹

الف) با رسم محور اعداد و یافتن این اعداد به طور هندسی تشخیص می دهیم $\frac{7}{4} < \frac{4}{3}$.

ب) با هم مخرج کردن این دو عدد داریم $\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$, $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$ و تشخیص می دهیم $\frac{7}{4} < \frac{4}{3}$.

ج) در این حالت نیز مکان دو عدد $-\frac{5}{3}$ و $-\frac{7}{5}$ را روی محور اعداد به دست می آوریم و تشخیص می دهیم $-\frac{7}{5} < -\frac{5}{3}$. با هم مخرج کردن این کسرها نیز داریم $-\frac{5}{3} = -\frac{25}{15}$, $-\frac{7}{5} = -\frac{21}{15}$ و نتیجه می گیریم $-\frac{7}{5} < -\frac{5}{3}$.

در این بخش یک فعالیت طرح شده است که هدف از آن رسیدن به این نکته است که بین هر دو عدد گویا, عدد گویای دیگری وجود دارد و دانش آموزان بتوانند چنین عددی را به دست آورند.

فعالیت صفحه ۹

بند(۱): چون مخرجها مساویند, کافی است عددی بین دو عدد صورت این کسرها ارائه کنیم. مثلا $\frac{3}{7}$ یک جواب برای این قسمت است.

بند(۲): در این قسمت چون مخرج دو عدد $\frac{4}{7}$ و $\frac{5}{7}$ مساویند و صورتهای آنها دو عدد متوالی اند نمی توان مستقیما عددی را همانند قسمت اول ارائه کرد. اما اگر صورت و مخرج این اعداد را در ۲ ضرب کنیم به دو عدد $\frac{8}{14}$ و $\frac{10}{14}$ می رسیم و همانند قسمت اول می توانیم عمل کنیم و عدد $\frac{9}{14}$ را ارائه کنیم.

بند(۳): در این قسمت دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ مخرج یکسان نداریم تا با روش بالا عمل کنیم, ولی می توانیم ابتدا مخرج این دو عدد را یکسان کنیم سپس از روش دو قسمت قبلی استفاده کنیم. برای این کار صورت و مخرج اولین عدد را در ۷ و صورت و مخرج عدد دوم را ۳ ضرب می کنیم و به اعداد $\frac{14}{21}$ و $\frac{15}{21}$ می رسیم. حال مانند قسمت دوم صورت و مخرج این اعداد را در ۲ (یا هر عدد طبیعی بزرگتر از ۲) ضرب می کنیم و به اعداد $\frac{28}{42}$ و $\frac{30}{42}$ می رسیم. حال عدد $\frac{29}{42}$ یک جواب برای این قسمت است.

تذکر: در حالت کلی برای یافتن n عدد گویا بین دو عدد گویا با مخرجهای مساوی و صورتهایی که دو عدد متوالی هستند می توانید صورت و مخرج این اعداد گویا را در $n+1$ ضرب کنید. زیرا با این عمل به دو عدد گویا با مخرج یکسان می رسیم که بین صورتهای آنها n عدد طبیعی می توان قرار داد.

در این بخش یک بیندیشیم طرح شده است که جواب آن, وجود نامتناهی عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده است. برای رسیدن به این جواب می توانید از نتیجه فعالیت این بخش استفاده کنید و با یافتن یک عدد گویا بین دو عدد گویای

داده شده, این عمل را تا هر قدر که بخواهیم تکرار کنیم و بین اعداد جدید به دست آمده اعداد دیگری به دست آوریم. نتیجه نهایی آن است که بین دو عدد گویای داده شده بیشمار عدد گویا می توان به دست آورد.

ارزیابی یادگیری:

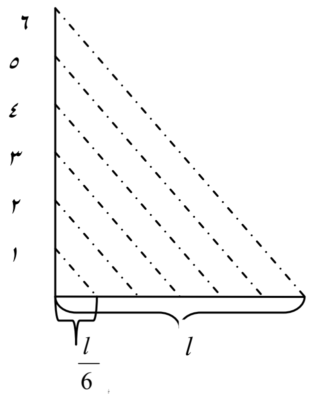
ساختن پاره‌خط‌هایی با طول اعداد گویای داده شده و مکان‌یابی اعداد گویای داده شده روی محور اعداد, نشان‌دهنده‌ی یادگیری دانش‌آموز از برقراری رابطه بین مفهوم جبری اعداد گویا و مفاهیم هندسی است. طرح مسائلی که همزمان مفاهیم هندسی و جبری اعداد گویا در آن باشد ، آزمون مناسبی برای تشخیص درک دانش‌آموز است . توانایی ارائه عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده و یافتن مکان آنها روی محور اعداد، می‌تواند نشان‌دهنده‌ی درک دانش‌آموز از اعداد گویای بین دو عدد گویای دیگر باشد.

محدوده مطالب:

اگر دانش‌آموز بتواند پاره‌خط‌های با طول معین از اعداد گویا را بسازد و اعمال جبری با اعداد گویا را انجام دهد و مکان اعداد گویا را روی محور بیابد و بین اعداد گویای داده شده ، عدد گویا ارائه کند ، برای آموزش این فصل کافی است. در این کتاب محاسباتی که مستلزم استفاده از کوچکترین مخرج مشترک باشد مطرح نیست ولی ساده سازی اعداد گویا را باید بتواند انجام دهد.

سطح بالاتر:

اگر دانش‌آموزان آمادگی بیشتری برای انجام عملیات هندسی و برقراری ارتباط بین مفاهیم جبری و هندسی دارند، می‌توانید با یادآوری قضیه‌ی تالس، مسئله تقسیم‌بندی یک پاره‌خط به چند پاره‌خط مساوی را به شکل زیر طرح کنید.



با این روش می‌توانید، ساختن پاره‌خط‌های با طول گویا به اندازه‌ی معین را انجام دهید.

با به دنبال هم گذاری پاره‌خطهای به طول دو عدد گویای r_1 و r_2 پاره خطی با طول r_1+r_2 به دست می آید. سعی کنید از این موضوع استفاده کنید و برای قانون جمع اعداد گویا استدلالی ارائه کنید. در این استدلال ابتدا قانون جمع اعداد گویا با مخرج یکسان را به طور هندسی به دست آورید وسپس حالت کلی را با هم مخرج سازی به دست آورید.

مساحت مستطیلی که طول و عرض آن برابر دو عدد گویای r_1 و r_2 است برابر r_1r_2 است . برای اثبات این مطلب اگر $r_1=\frac{p_1}{q_1}$ و $r_2=\frac{p_2}{q_2}$ ، مستطیلی با طول و عرض p_1 و p_2 بسازید که مساحت آن برابر p_1p_2 می‌شود . طول p_1 را به q_1 قسمت مساوی و طول p_2 به q_2 قسمت مساوی تقسیم کنید و مستطیل‌های مساوی با طول و عرض $\frac{p_1}{q_1}$ و $\frac{p_2}{q_2}$ به دست آورید. روی‌هم چند مستطیل دارید. مساحت هر مستطیل کوچک چقدر می‌شود؟

برای تشخیص نامساوی بین اعداد گویای مثبت ، روشی در کتاب گفته شده است که برای دانش‌آموزان قویتر می‌توانید درستی این روش را استدلال کنید . کافی است با هم مخرج کردن به این نتیجه مطلوب برسید.

مسائل صفحه ۱۰

مسئله ۱) این مسئله محاسباتی است و مربوط به عملیات جبری روی اعداد گویا است.

مسئله ۲) نصف یک میله یک متری ۵۰ سانتی متر است و $\frac{2}{5}$ از آن برابر است با

$$\frac{2}{5}\times 50 = 20 \quad cm$$

مسئله ۳) این یک مسئله است که به صورت کلامی بیان شده است و دانش آموز باید بتواند اطلاعات لازم را از آن استخراج کند و با عملیات مناسب به جواب برسد.

مدت زمان استراحت حمید برابر است با $8 = 24 \times \frac{1}{3}$ که بر حسب ساعت است. مدت زمان مطالعه برابر است با $6 = 24 \times \frac{1}{4}$. مدت زمان کارهای پیش آمده برابر است با $3 = 24 \times \frac{1}{8}$. پس رویهم 8+6+6+3=23 ساعت کارهای ذکر شده را انجام می دهد و بقیه آن که ۱ ساعت است به ورزش می پردازد.

مسئله ۴) کافی است پس از هم مخرج کردن اعداد گویای داده شده, صورت و مخرج اعداد به دست آمده را در ۵ ضرب کنید و از روش توضیح داده شده در کتاب استفاه کنید.

مسئله ۵) این اعداد را دو بدو مقایسه کنید و در ترتیب مناسب نسبت به هم قرار دهید.

$$\frac{5}{24} < \frac{1}{3} < \frac{3}{7}$$

بخش نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

اهداف بخش:

- یادآوری اعداد اعشاری به عنوان دسته‌ای از اعداد گویا که به صورت اعشاری قابل نمایش هستند.
- یادآوری و تقویت مهارت اعمال جمع و ضرب اعداد اعشاری
- آشنایی با قسمت اعشاری و قسمت صحیح اعداد اعشاری مثبت
- مقایسه اعداد اعشاری

پیشنیازها:

آشنایی با اعداد اعشاری و نمایش اعشاری و عملیات جبری روی آنها – آشنایی با اعداد گویا و عملیات جبری روی آنها

واژه های کلیدی:

اعداد اعشاری – قسمت اعشاری و قسمت صحیح اعداد اعشاری مثبت

نگاه کلی به بخش :

این بخش جنبه‌ی یادآوری دارد و با توضیح نمایش اعشاری اعداد و معنای واقعی این نمایش اعشاری شروع می‌شود. سپس خواص ویژه‌ی اعداد اعشاری ، نقش ممیز، جمع و ضرب اعداد اعشاری گفته و تمرین می‌شود. همچنین به صورت مثالی ، قسمت صحیح و قسمت اعشاری اعداد اعشاری مثبت معرفی می‌گردند.

ورود به مطلب:

مناسب است که ابتدا نمایش دهدهی اعداد طبیعی و ارزش مکانی ارقام یادآوری شود, سپس این سوالات طرح شوند که آیا می توان اعداد کمتر از ۱ را نیز به همین شکل نمایش داد؟ این شیوه نمایش را چگونه می توان تعمیم داد تا اعداد کمتر از ۱ نیز بتوانند نمایش داده شوند؟ با توجه به ارزش مکانی ارقام که از راست به چپ برابر ۱ , ۱۰ , ۱۰۰ , ... هستند می توان این الگو را یافت که با حرکت به سمت راست ارزشهای مکانی بر ۱۰ تقسیم می شوند. پس با گذشتن از ۱ و حرکت به سمت راست ۱ می توانیم ارزشهای مکانی $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{1000}$ و .... را در نظر بگیریم. سپس شیوه های نمایش اعشاری را بیان کنیم. لازم است بعدا پرسش شود که آیا همه اعداد گویای کمتر از ۱ را می توان با این روش نمایش داد؟ جواب منفی است و فقط برخی از اعداد گویا به این شکل قابل نمایش هستند که آنها را اعداد اعشاری می نامند.

تذکر: توجه داشته باشید که در تعمیم نمایش دهدهی اعداد که نام دیگر آن همان نمایش اعشاری است فقط تعداد متناهی از ارقام به کار می روند که دارای ارزشهای مکانی $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{1000}$ و .... هستند. بنابراین منظور از اعداد اعشاری فقط آن اعدادی هستند که اصطلاحا بسط اعشاری آنها مختوم است. مثلا $\frac{1}{3}$ یک عدد اعشاری محسوب نمی شود زیرا با تعدادی متناهی از ارقام به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. البته نمایش اعشاری اعداد را می توان به نامتناهی از ارقام هم تعمیم داد منتها این عمل محتاج استفاده از مفهوم حد است که در این کتاب وارد آن نمی شویم. با چنین تعمیمی هر عدد حقیقی

دارای یک نمایش اعشاری نامتناهی یا بسط اعشاری می شود ولی این به معنای آن نیست که لازم باشد همه اعداد را اعداد اعشاری بنامیم. همه اعداد بسط اعشاری دارند ولی مقصود ما از اعداد اعشاری فقط آنهایی هستند که در نمایش اعشاری آنها تعدادی متناهی رقم وجود دارد. توجه داشته باشید که اصولا اصطلاح اعشاری در درجه اول مربوط به روش نمایش دهدهی اعداد است نه این که اعداد خاصی ویژگی اعشاری بودن داشته باشند. حال در این روش نمایش, آن دسته از اعدادی که با تعدادی متناهی رقم قابل نمایش بوده اند را اعداد اعشاری نامیده اند. متاسفانه اصطلاح عدد اعشاری در برخی کتابها درست به کار برده نشده است و از این که همه اعداد بسط اعشاری دارند ناخودآگاه استنباط شده است که همه اعداد را می توان عدد اعشاری نامید. کتابهایی که این اصطلاح در آنها درست به کار نرفته است بعدا اصلاح خواهند شد.

<u>فعالیت آموزشی:</u>

پس از ورود به مطلب, قسمت صحیح و قسمت اعشاری اعداد اعشاری از طریق مثالها تعریف شده اند. در اولین تمرین در کلاس این بخش روی برخی مفاهیم اعداد اعشاری تمرین شده است و جوابهای آن به شکل زیرند.

تمرین در کلاس صفحه ۱۲

بند(۱): ساده است و مثلا جواب قسمت (ج) قسمت صحیح صفر است و قسمت اعشاری خودش است و برابر $\frac{23}{1000}$.

بند(۲): ویژگی مشترک اعداد اعشاری آن است که می توان آنها را به صورت یک عدد گویا نوشت که مخرج آنها توانی از ۱۰ باشد.

بند(۳): در هر مورد باید در توانی از ۱۰ ضرب یا بر توانی از ۱۰ تقسیم کرد. این بستگی به آن دارد که ممیز چند رقم جا به جا شده است و به کدام سمت جا به جا شده است.

بند(۴): اعداد داده شده در این قسمت همگی مساوی هستند و نتیجه به دست آمده آن است که در یک عدد اعشاری دارای ممیز اگر سمت راست آن هر چقدر صفر قرار دهی تغییری در عدد ایجاد نمی شود. همچنین در یک عدد اعشاری دارای ممیز, اگر صفرهای بعد از ممیز را که بعد از آنها رقم مخالف صفری وجود ندارد حذف کنیم تغییری در عدد ایجاد نمی شود. البته در بخش بعدی که مفهوم تقریب های اعشاری اعداد حقیقی مطرح می شوند گفتن این که یک عدد حقیقی با تقریب دو رقم اعشار برابر ۴/۲۰ است و گفتن این که یک عدد حقیقی با دقت یک رقم اعشار برابر ۴/۲ است, اعداد ۴/۲۰ و ۴/۲ نشاندهنده دو دقت تقریبی متفاوت هستند. البته این دو عدد مساویند ولی برای نشان دادن آن که عددی با دقت دو رقم اعشار برابر ۴/۲ است بهتر است آن را به صورت ۴/۲۰ بنویسیم.

در تمرین در کلاس بعدی که در صفحه ۱۳ قرار دارد هدف آن است که قانون ضرب اعداد اعشاری توجیه شود و بندهای آن محاسباتی است و جواب بند آخر در کتاب آمده است.

در آخر این بخش نکته ای از کتاب مفتاح المعاملات آمده است که در برنامه رسمی درسی نیست و جواب آن استفاده از تعریف عدد مخلوط که به صورت جمع یک عدد صحیح و یک عدد کسری است و استفاده از قاعده پخشی ضرب نسبت به جمع است.

مسائل صفحه ۱۴

مسئله ۱) همه این اعداد را به صورت اعداد طبیعی می توانید بنویسید و سپس با هم مقایسه کنید. یا همه را به صورت اعدادی که در توان یکسانی از ۱۰ ضرب شده اند بنویسید و سپس با هم مقایسه کنید.

مسئله ۲) می توانید همه این اعداد را به صورت اعداد گویایی با مخرج یکسان ۱۰۰۰ بنویسید و سپس صورت آنها را مقایسه کنید.

مسئله ۳) این یک مسئله محاسباتی برای تمرین در محاسبه با اعداد اعشاری است.

در مورد اعداد اعشاری مناسب است به مقایسه اعداد اعشاری و روش تشخیص کوچکتری و بزرگتری بین آن‌ها بپردازیم و مکان‌یابی اعداد اعشاری روی محور را بحث کنیم و شیوه‌ی ساختن عدد اعشاری بین دو عدد اعشاری دیگر را بررسی کنیم.

ارزیابی یادگیری:

با طرح مسائلی در مورد تشخیص اعداد اعشاری و غیر اعشاری و انجام محاسبات جبری روی آنها می توان میزان یادگیری دانش آموزان را سنجید.

محدوده مطالب:

در این کتاب ، نمایش‌های اعشاری یا بسطهای اعشاری نامتناهی مطرح نشده‌اند و مقصود از اعداد اعشاری فقط آن اعدادی هستند که نمایش اعشاری یا بسط اعشاری آنها متناهی است. بنابراین از طرح بسطهای اعشاری نامتناهی باید پرهیز کرد و شناخت اعداد اعشاری فقط به عنوان کسرهای اعشاری که همان اعداد گویایی هستندکه به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر توانی از ۱۰ می‌باشند ارائه شود. عملیات جبری در این اعداد باید با مشابهت با عملیات جبری روی اعداد صحیح فرا گرفته شوند.

نکات مهم

یکی از نکات مهم این بخش آن است که اصطلاح «عدد اعشاری» در این کتاب با کتاب قبلی تفاوت دارد و معلمان باید طبق اصطلاحات کتاب جدید در مورد اعداد اعشاری صحبت کنند. عملاً در ادبیات به کار رفته برای سخن گفتن در مورد مفاهیم اعشاری چند اصطلاح وجود دارد که با یکدیگر اشتباه می‌شوند.

«نمایش اعشاری مختوم» ، « عدد اعشاری» ، « کسر اعشاری» ، « نمایش اعشاری» ، «نماد اعشاری» ، « بسط اعشاری» .

برای پرهیز از این همه اصطلاحات که به سادگی با هم مخلوط می‌شوند، در کتاب حاضر فقط یک اصطلاح وجود دارد که « عدد اعشاری» است . منظور از اعداد اعشاری آن اعدادی هستند که به عنوان اعداد گویا به صورت $\frac{p}{10^n}$ هستند که

p عددی صحیح و n یک عدد حسابی است. نمایش اعشاری این اعداد ، فقط تعدادی متناهی رقم اعشار دارد.

اصطلاح دیگری که در این کتاب به کار نرفته است ولی در سال‌های بعد آن را به‌کار خواهیم برد، « نمایش اعشاری» و « بسط اعشاری» است. این اصطلاحات مربوط به اعدادی هستند که اصطلاحاً بسط اعشاری آن‌ها مختوم نیست و تا بینهایت ادامه دارد. در این کتاب فقط اعداد اعشاری (آنهایی که بسط مختوم دارند) طرح می‌شوند و نباید وارد مفهوم دیگری مانند بسط‌های اعشاری نامتناهی بشویم.

بخش اعداد حقیقی

اهداف بخش:

- شناختن اعداد حقیقی به عنوان نقاط روی محور
- شناخت هر عدد حقیقی مثبت به عنوان طول یک پاره‌خط
- آشنایی با مفهوم قرینه اعداد و قدرمطلق اعداد حقیقی

پیشنیازها:

آشنایی با خط– قضیه فیثاغورس – آشنایی با محور اعداد و اعداد گویا

واژه های کلیدی:

اعداد حقیقی– قضیه فیثاغورس– قدرمطلق – طول پاره خط

نگاه کلی به بخش :

در این بخش, چگونگی پراکندگی اعداد گویا روی محور اعداد به عنوان یک مسئله طرح می‌شود. با توجه به آن که اعداد گویا به طور متوالی پشت سرهم قرار نگرفته اند, تشخیص آن که آیا غیر از اعداد گویا ، نقاط دیگری هم روی خط وجود دارند امکان‌پذیر نیست . در این جا مشاهده مستقیم و تجربه عملی کمکی, برای جواب به این سؤال فراهم نمی‌کند.

به همین دلیل ، از لحاظ تاریخی نیز گمان اصلی آن بود که اعداد گویا کلیه نقاط خط را می‌پوشانند. کشف اعداد حقیقی و دلیل نیاز به اعداد حقیقی؛ از هندسه و خواص پیوستگی خط می‌آید. قضیه فیثاغورس کلید کشف اعداد غیرگویا است.

وقتی نتیجه می‌گیریم ، اعداد گویا همه‌ی خط را پر نمی‌سازند، نقاطی که نظیر اعداد گویا نیستند را اعداد گنک می‌نامیم. ساختن چند نمونه از اعداد گنک که به صورت $\sqrt{n}$ هستند ، کمک زیادی به درک و قبول این اعداد جدید می‌کند.

قوانین جمع و ضرب اعداد حقیقی در دبیرستان تعریف نمی شوند و می‌پذیریم که این اعداد جدید هم همانند اعداد قبلی با یکدیگر جمع و ضرب می‌شوند و همان قوانین برای این اعداد جدید نیز برقرار می‌ماند.

به طور ضمنی پذیرفته می‌شود و می‌توان تذکر داد که جمع دو عدد حقیقی به طور هندسی با پهلوی هم قرار دادن دو پاره‌خط انجام می‌شود. تعریف ضرب اعداد حقیقی به صورت, عملیاتی روی پاره‌خط‌ها محتاج قضیه تالس است و وارد آن نمی‌شویم . این که مساحت یک مستطیل که طول و عرض آن اعداد حقیقی هستند، برابر حاصلضرب آن دو عدد است نیز به طور ضمنی پذیرفته می‌شود و می‌توان آن را تذکر داد . رابطه کوچکتری و بزرگتری بین اعداد حقیقی نیز به طور ضمنی از طریق مکان هندسی روی محور اعداد در نظر گرفته می‌شود.

مفاهیم قرینه و قدرمطلق نیز به طور هندسی از طریق فاصله‌ی نقاط تا مبدأ از طریق فعالیت تعریف می‌شوند و خواص ابتدایی آن‌ها بررسی می‌شوند.

ورود به مطلب:

در این بخش سه مفهوم «اعداد حقیقی» و «مقایسه اعداد حقیقی» و «قدر مطلق» مورد بحث قرار گرفته اند که برای هر کدام باید شیوه ای برای ارائه مطلب داشته باشیم.

برای ارائه اعداد حقیقی بهتر است با طرح این سوالات شروع کنیم که آیا اعداد گویا تمام محور اعداد را می پوشانند؟ چگونه می توانیم این موضوع را تشخیص دهیم؟ سپس با توجه به چگال بودن (متوالی نبودن) اعداد گویا نتیجه بگیرید با مشاهده مستقیم نمی توان به این سوال پاسخ گفت و جوابی را از طریق قضیه فیثاغورس ارائه کنید.

برای مقایسه بین اعداد حقیقی, مقایسه پاره خطها را مطرح کنید و طول پاره خطهای بزرگتر را به عنوان عدد بزرگتر تعریف کنید. نهایتا روی محور اعداد, اعدادی که مکان آنها در سمت راست مکان عدد دیگر قرار می گیرند به عنوان عدد بزرگتر نتیجه گیری کنید.

برای ارائه مفهوم قدر مطلق از مفهوم فاصله نقطه متناظر یک عدد روی محور تا مبدا صحبت کنید و مقدار این فاصله را به عنوان قدر مطلق آن عدد معرفی کنید. با مقایسه این فاصله با خود عدد, چگونگی محاسبه قدرمطلق یک عدد را به طور جبری ارائه کنید.

فعالیت آموزشی:

تمرین در کلاس صفحه ۱۵

هدف این تمرین در کلاس تثبیت مفهوم اعداد گنگ از طریق قضیه فیثاغورس است. جوابهای این تمرین در کلاس به شکل زیر است.

بند(۱): برای رسم مثلث قائم الزاویه با اضلاع به طول ۱ , می توانید با گونیا یک زاویه قائمه ایجاد کنید و روی ضلعهای این زاویه طول ۱ را با استفاده از خط کش بسازید. برای رسم مثلث قائم الزاویه با وتر به طول ۲ و یک ضلع به طول ۱ می توانید با گونیا یک زاویه قائمه ایجاد کنید و روی یک ضلع آن طول ۱ را با خط کش جدا کنید و از نقطه به دست آمده با پرگار دایره به شعاع ۲ را رسم کنید تا ضلع دیگر زاویه را قطع کند. برای رسم مثلث سوم می توانید مانند مثلث اول عمل کنید.

بند(۲): با رسم این مثلثها به گونه ای که ضلع پاییینی آنها روی محور اعداد باشد و ابتدای یا انتهای این ضلعها در مبدا محور قرار گیرد, پس از رسم این مثلثها با پرگار می توانید طول پاره خط های ساخته شده را روی محور اعداد منتقل کنید.

تمرین در کلاس صفحه ۱۶

هدف این تمرین در کلاس تشخیص چگونگی جمع و تفریق اعداد حقیقی و مکان یابی آنها روی محور اعداد و بیان عملی مفهوم نامساوی در اعداد حقیقی است. جواب این تمرین در کلاس به شکل زیر است.

بند(۱): نکته کلیدی در انجام این بند آن است که دانش آموزان باید بدانند در جمع دو عدد حقیقی مثبت, اگر دو پاره خط که طول آنها به اندازه این دو عدد باشند را به دنبال هم قرار دهیم, پاره خطی با طول مجموع آن دو عدد به دست می آید. بنابراین برای ساختن پاره خطی به طول $1+\sqrt{5}$ کافی است دو پاره خط با طولهای ۱ و $\sqrt{5}$ بسازیم و به دنبال هم قرار دهیم. برای ساختن $1-\sqrt{5}$ نیز مانند عمل تفریق باید عمل انتقال به چپ را از نقطه نظیر ۱ به اندازه $\sqrt{5}$ انجام دهیم. در واقع اگر دایره ای به شعاع $\sqrt{5}$ به مرکز نقطه نظیر ۱ بزنیم, این دایره محور اعداد را در دو نقطه قطع می کند که نقطه سمت راست نظیر عدد $1+\sqrt{5}$ و نقطه سمت چپ نظیر عدد $1-\sqrt{5}$ است.

بند(۲): مکان عدد بزرگتر سمت راست مکان عدد کوچکتر است. جمع یک عدد با یک عدد مثبت عددی بزرگتر از عدد اول ایجاد می کند زیرا این عمل معادل یک انتقال به راست عدد اول روی محور اعداد است.

بند(۳): ترتیب بین اعداد بند اول به شکل زیر است.

$$-1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{5} < \frac{1}{2} < 1 < \sqrt{5}-1 < 2 < 3 < 1+\sqrt{5}$$

فعالیت صفحه ۱۶

هدف این فعالیت آموزش مفهوم قدر مطلق است که از طریق هندسی و فاصله نقاط محور تا مبدا انجام می شود. جواب بندهای این فعالیت به شکل زیر است.

بند(۱): فاصله نقاط نظیر اعداد داده شده تا مبدا برابر خود این اعداد است.

بند(۲): اندازه این فاصله ها خود این اعداد را نشان می دهند.

بند(۳): فاصله این نقاط تا مبدا به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۱۲ است.

بند(۴): این فاصله ها برابر قرینه این اعداد است.

بند(۵): فاصله نقطه نظیر هر عدد نامنفی تا مبدا برابر خود آن عدد است و فاصله نقطه نظیر یک عدد منفی تا مبدا برابر قرینه آن عدد است.

بعد از این فعالیت مفهوم قدرمطلق یک عدد تعریف می شود که همان فاصله نقطه نظیر آن عدد تا مبدا است.

ارزیابی یادگیری:

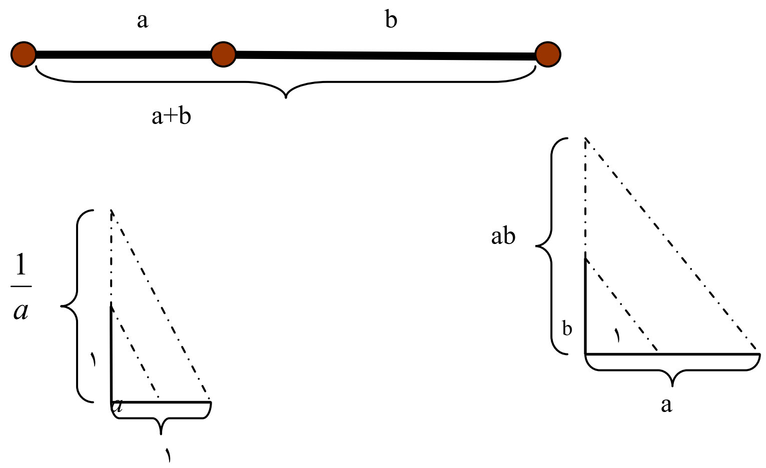
یافتن مکان اعداد غیرگویای خاص و انجام عملیات جمع و تفریق بین آن‌ها روی محور اعداد, نشاندهنده‌ی درک دانش‌آموزان از اعداد غیرگویا و عملیات جبری روی اعداد گنگ است . همچنین تشخیص نامساوی بین چند عدد گنگ که با تکنیک‌های ساده قابل تشخیص است نشاندهنده درک مفهوم نامساوی است. طرح چند مسئله که در آنها انجام عملیات بالا خواسته شده باشد می تواند میزان یادگیری دانش آموزان را نشان دهد.

محدوده مطالب:

یادگیری اعداد حقیقی به عنوان نقاط یک خط مطرح است و بیان دیگری از اعداد حقیقی مورد نظر نیست. نوع دیگری از توصیف اعداد حقیقی در سطح دبیرستان قابل انجام نیست و در دبیرستان منظور از اعداد حقیقی همان نقاط محور اعداد هستند. در مورد مفهوم قدر مطلق نیز فقط تعریف آن مطرح است و خواص دیگر لازم نیست مطرح شوند.

سطح بالاتر:

در سطح بالاتر می‌توان اعمال جمع و ضرب و تقسیم و وارون‌گیری اعداد حقیقی را از طریق قضیه‌ی تالس و نسبت‌های مساوی در مثلث‌های متشابه مطرح کرد.



با رسم شکلهای بالا برای دو عدد مثبت داده شده a و b می توانید مجموع آنها و حاصلضرب آنها و وارون آنها را به صورت هندسی حساب کنید. با رسم شکل مشابه مقدار $\frac{a}{b}$ را نیز می توانید حساب کنید.

تشخیص کوچکتری و بزرگتری بین اعداد گنگ در برخی موارد مشکل است و می‌توان برای دانش‌آموزان قوی‌تر چگونگی تشخیص این رابطه را از طریق تقریب های اعشاری یا توان رسانی و مقایسه اعداد به توان رسیده در مثال‌های خاص مطرح کرد.

$$\sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{4} \qquad\qquad \sqrt{5}+\sqrt{3}\ ,\ ۴ \qquad\qquad \sqrt{3}-\sqrt{2}\ ,\ 0/3$$

بخش تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

اهداف بخش:

- درک مفهوم تقریب اعشاری اعداد حقیقی و دقت این تقریب‌ها
- یافتن تقریب‌های اعشاری اعداد گویا

پیشنیازها:

اعداد اعشاری – اعداد حقیقی – فاصله مکان اعداد روی محور

واژه های کلیدی:

تقریب – تقریب اعشاری – دقت تقریب

نگاه کلی به بخش :

در این بخش از طریق مثال, نمونه‌های تقریب‌های اعشاری و میزان دقت این تقریب‌ها توضیح داده شده است. یافتن تقریب‌های اعشاری اعداد گویا نیز از طریق مثال گفته شده است . تقریب‌های اعشاری چند عدد رادیکالی خاص نیز آورده شده است ولی چگونگی یافتن این تقریب‌ها نیامده است.

منظور از تقریبهای اعشاری در این بخش همان تعیین تقریبات با روش قطع کردن است. در مورد میزان دقت تقریب‌های اعشاری ، تعریف مستقیماً نیامده است و فرض شده است دانش‌آموز به طورِ ضمنی آن را درک می‌کند. ولی اگر دانش‌آموز در مورد مفهوم دقت تقریب‌های اعشاری دچار ابهام بود، می‌توان توضیح داد که مثلاً «تقریب اعشاری $\sqrt{2}$ تا دو رقم اعشار ۱/۴۱ است» به معنای آن است که ۱/۴۱ از $\sqrt{2}$ کوچکتر است ، اما اگر آخرین رقم اعشاری را یک واحد اضافه کنیم از $\sqrt{2}$ بزرگتر می‌شود یعنی $1/41 < \sqrt{2} < 1/42$ به طور کلی وقتی می‌گوییم یک عدد اعشاری تقریب اعشاری یک عدد حقیقی تا n رقم اعشار است به معنای آن است که آن عدد اعشاری n رقم بعد از اعشار دارد و از آن عدد حقیقی کوچکتر است ولی اگر به آخرین رقم آن یک واحد اضافه کنیم از آن عدد حقیقی بزرگتر می‌شود.

البته در محاسبات تقریبی عبارت های عددی لزومی به استفاده از تقریب قطع کردن نیست و ما می توانیم از مقدارهای تقریبی که ممکن است بزرگتر از مقدار واقعی باشند نیز استفاده کنیم. مثلا در محاسبه $\sqrt{24}$ می توانیم آن را تقریبا برابر $\sqrt{25}$ یعنی ۵ بدانیم.

ورود به مطلب:

مناسب است که ابتدا مقدار تقریبی اعداد آشنا مانند $\frac{1}{3}$ مطرح شود و مقدارهایی که میزان دقت تقریبهای متفاوتی دارند ارائه شوند. بنابراین مفهوم مقدارهای تقریبی را ابتدا در محاسبه مقدار تقریبی اعداد گویا مطرح کنید. همچنین اهمیت این مقادیر تقریبی در محاسبات گفته شود و سپس وارد تقریب اعشاری اعداد حقیقی شویم. در اعداد حقیقی مفهوم تقریبات اعشاری بسیار ضروری است زیرا کار با خود اعداد حقیقی بسیار مشکل است و شناخت ما از اعداد حقیقی از طریق همین تقریبات است.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب و توضیح مفاهیم, به یک تمرین در کلاس می رسیم که جواب بندهای آن به شکل زیر است.

تمرین در کلاس صفحه ۱۸

بند(۱): مقادیر تقریبی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ در مثالها داده شده است و اگر این دو عدد را با دقت یک رقم اعشار با هم جمع کنیم عدد $3/1$ به دست می آید. این عدد با π که با دقت یک رقم اعشار در نظر گرفته شود مساوی است.

بند(۲): اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را با دقت دو رقم اعشار در نظر بگیریم و با هم جمع کنیم برابر $3/14$ می شود. این عدد با π که با دقت دو رقم اعشار در نظر گرفته شود مساوی است.

بند(۳): با محاسبات بالا نمی توان به این پرسش جواب گفت زیرا تساوی دو عدد با دقت دو رقم اعشار نتیجه نمی دهد دو عدد مساویند.

بند(۴): اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را با دقت سه رقم اعشار در نظر بگیریم و با هم جمع کنیم برابر $3/146$ می شود. این عدد با π که با دقت سه رقم اعشار در نظر گرفته شود مساوی نیست.

مسائل صفحه ۱۹

مسئله ۱) B نظیر عدد $3+\sqrt{2}$ است.

مسئله ۲) این مسئله به بخشهای قبلی مربوط است و به آنجا باید منتقل شود و هدف آن تقویت تعبیر هندسی اعداد و مهارت یافتن مکان اعداد گویا روی محور است.

مسئله ۳) با توجه به تساوی $8 = 3^2 - 1^2$ با ساختن یک مثلث قائم الزاویه با وتر ۳ و یک ضلع ۱ ضلع دیگر $\sqrt{8}$ خواهد بود. شیوه ساختن $1-\sqrt{3}$ در تمرین در کلاس و مسئله (۱) دیده می شود.

مسئله ۴) در این مسئله باید بتوانید تشخیص دهید که کدام اعداد از کدام اعداد کوچکتر یا بزرگترند.

مسئله ۵) در این مسئله باید علامت اعداد داخل قدر مطلق را تشخیص دهید و از این طریق این اعداد را بدون قدر مطلق بنویسید.

مسئله ۶) این مسئله تمرینی روی نمایشهای مختلف یک عدد به صورت کسری و اعشاری و مفهوم درصد است و می تواند

در بخشهای قبلی بیاید.

مسئله ۷) این مسئله مربوط به بخشهای قبل است و باید به آنجا منتقل شود. در این اعداد فقط $\frac{15}{6}$ و $\frac{8}{5}$ عدد اعشاری هستند و $\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2/5 \quad , \quad \frac{8}{5}=1/6$. قسمت صحیح $\frac{15}{6}$ برابر ۲ و قسمت اعشاری آن ۰/۵ است. قسمت صحیح $\frac{8}{5}$ برابر ۱ و قسمت اعشاری آن ۰/۶ است.

مسئله ۸)

$$
\begin{aligned}
&3/9 \div 40/9 \approx \frac{4}{41} \approx 0/1 \\
&69/3 \div 1/9 \approx \frac{69}{2} = 34/5 \\
&(9/4+2/35)\times 87/3 \approx (9/4+2/4)\times 87/3 = 11/8\times 87/3 \\
&\qquad\qquad \approx 12\times 87 = 1044 \\
&\frac{\sqrt{145}\times 7/96}{\sqrt{24}} \approx \frac{\sqrt{144}\times 8}{\sqrt{25}} = \frac{12\times 8}{5} = 19/2
\end{aligned}
$$

مسئله۹) مساحت این لکه با شعاع 4 سانتی متر برابر $16\pi \approx 50/24$ سانتی متر مربع است و مساحت آن با شعاع $4/2$ سانتی متر برابر $17/64\pi \approx 55/3896$ سانتی متر مربع است. پس میزان اضافه شدن مساحت لکه بر حسب سانتی متر مربع برابر است با $55/3896 - 50/24 = 5/1496$.

مسئله۱۰) رابطه این جمله با عدد π در تعداد حرفهای به کار رفته در کلمات این جمله است تعداد این حرفها به ترتیب همان ارقام نمایش اعشاری عدد π تا ده رقم اعشار است.

نمایش هندسی تقریب‌های اعشاری و بالاتر بردن دقت این تقریب به طور هندسی قابل نمایش است و مناسب است معلمان این نمایش را در یک یا چند مثال برای دانش‌آموزان ارائه کنند. برای این عمل باید عدد حقیقی داده شده را در وهله‌ی اول بین دو عدد صحیح قرار داد و سپس با تقسیم این فاصله به ده قسمت مساوی آن عدد را در فاصله کوچکتری قرار داد و این عمل را تا هر مرحله که می‌خواهیم ادامه دهیم. در هر مرحله یک رقم به دقت تقریب اعشاری اضافه می‌شود.

ارزیابی یادگیری:

طرح سوالاتی برای یافتن مقدار تقریبی اعداد گویا با تعداد رقمهای اعشار متفاوت, می تواند میزان یادگیری مفهوم تقریب اعشاری را نشان دهد.

محدوده مطالب:

دانش‌آموز باید بتواند تقریب اعشاری اعداد تا یک یا دو رقم اعشار را به طور هندسی نمایش دهد و یک عدد حقیقی را بین دو عدد اعشاری که فقط در رقم آخر اختلاف دارند و اختلاف آخرین رقم آنها یک واحد است روی محور نشان دهد. دانش‌آموز باید بتواند تقریب‌های با دقت دلخواه اعداد گویا را حساب کند ولی یافتن تقریب‌های اعشاری اعداد رادیکالی الزامی نیست.

سطح بالاتر:

این نکته که تقریب‌های اعشاری مجموع دو عدد حقیقی را می‌توان از جمع‌کردن تقریب‌های اعشاری آن دو عدد به دست آورد, قابل ذکر است . این مطلب برای حاصلضرب هم برقرار است. البته با انجام عمل جمع یا ضرب روی تقریبهای اعشاری دو عدد, دقت تعداد رقم‌های اعشاری تغییر می‌کند. مثلا در جمع تقریبات اعشاری دو عدد حقیقی که تا n رقم دقت دارند عدد اعشاری به دست آمده با دقت $n-1$ رقم مجموع آن دو عدد حقیقی را نشان می دهد. در عمل ضرب هر چه خود آن اعداد بزرگتر باشند دقت حاصلضرب تقریبات اعشاری آنها کمتر خواهد بود.

با استفاده از تقریبات اعشاری اعداد حقیقی می‌توان اثباتی برای این که مساحت یک مستطیل برابر حاصلضرب طول و عرض آن است به دست آورد. البته در این کار مفهوم حد به طور پنهان حضور دارد ولی می‌توان از این طریق توجیه مناسبی برای آن ارائه کرد.

برای دانش‌آموزان قویتر روش‌های یافتن تقریب‌های اعشاری اعدادی مانند $\sqrt{n}$ نیز قابل طرح است که با آزمون و خطا و عمل ضرب اعداد اعشاری این عمل امکان‌پذیر است . مثلاً عدد ۱/۴۱ تقریب اعشاری $\sqrt{2}$ تا دو رقم اعشار است زیرا

$$(۱/۴۱)^۲ < ۲ \quad و \quad ۲ < (۱/۴۲)^۲$$

بخش نمادها و زبان ریاضی

اهداف بخش:

- شناخت نمادهای حرفی به عنوان نشانه‌ی یک عدد دلخواه
- به کارگیری حروف و نمادها برای بیان خواص کلی اعداد
- ترجمه جملات ریاضی به جملات فارسی و برعکس

توضیحات: با توجه به شیوه به کارگیری حروف، برخی قراردادهای مقدماتی ومحاسبات مقدماتی با حروف در این بخش آموزش داده می‌شود. در این بخش دانش‌آموز باید بتواند با حروف مانند عدد که مقدار آن نامشخص است عمل کند. در این بخش دانش‌آموزان باید بتوانند دانش خود را با نمادها بیان کنند و آن‌ها را به زبان فارسی بازگویی کنند.

پیشنیازها:

آشنایی با گزاره های ریاضی – توانایی بیان گزاره های ریاضی به فارسی

واژه های کلیدی:

نماد حرفی – گزاره ریاضی – زبان ریاضی – زبان فارسی

نگاه کلی به بخش :

در بخش اول دانش‌آموز آماده شده است که نمایش دهدهی اعداد را به عنوان نشانه‌ی اعداد خاص در نظر بگیرد و طبق قرار داد نمادهای حرفی به عنوان نشانه یک عدد دلخواه معرفی می‌شوند . بنابراین دانش‌آموزان اعداد خاص را با نشانه‌های خاص خود (نمایش دهدهی) خواهند شناخت و اعداد دلخواه را با حروف و نمادها نشان خواهند داد.

این عملیات به صورت ارائه مثال و نشان دادن چگونگی به کارگیری نمادها در بیان گزاره های ریاضی در طی مثالهای متعدد انجام می شود. این بخش همانند یادگیری یک زبان تازه برای سخن گفتن است و روش آموزش آن دیدن چگونکی کاربرد نمادها در ساختن گزاره ها در طی مثالهای متعدد است.

ورود به مطلب:

از دانش آموزان می خواهیم گزاره های ساده ریاضی را که در مورد اعداد خاص هستند, بیان کنند. سپس از دانش آموزان می خواهیم ویژگیهای کلی که مربوط به همه اعداد است را بیان کنند. سپس با وارد کردن نمادهای حرفی به عنوان نشانه یک عدد دلخواه همان جملات را مجددا به زبان ریاضی بیان می کنیم. با تکرار این عملیات, قراردادهای لازم برای استفاده از نمادهای حرفی را برای بیان گزاره های ریاضی ارائه می کنیم.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب و توضیح مثالها در این بخش چند تمرین در کلاس و یک فعالیت وجود دارد که هدف از همه آنها ارائه موقعیتهایی است که مفاهیم ریاضی یا در قالبهای هندسی یا به زبان فارسی در آمده باشند و همزمان بیان آنها از طریق نمادها انجام شود تا دانش آموزان بتوانند بیانهای نمادین را با بیانهای فارسی و موقعیتهای واقعی متناظر سازند.

تمرین در کلاس صفحه ۲۱

هدف از این تمرین بیان جملات فارسی از طریق نمادها و برعکس است. فرض بر این است که دانش آموزان جملات فارسی را به خوبی می فهمند و درک می کنند, بنابراین یک عمل ترجمه از زبان فارسی به زبان نمادین و برعکس به خوبی می تواند معنای جملات نمادین را مشخص سازد. جوابهای این تمرین به صورت زیر است.

بند(۱): الف) $-12+18=6$ ب) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ج) $(-1)\times(-3)+50>50$

بند(۲): الف) حاصلجمع منفی دوازده و منفی سه که در دو ضرب شود برابر منفی سی می شود.

ب) تفاضل دو از دو پنجم برابر منفی هشت پنجم است.

ج) با ضرب منفی سه دوم در دو پانزدهم و جمع با یک, حاصل از سیزده پانزدهم کوچکتر می شود.

تمرین در کلاس صفحه ۲۳

در این تمرین نیزهمان هدف تمرین قبلی دنبال می شود و فقط جملات پیچیده تری مطرح می شوند. جوابهای این تمرین

به صورت زیر است.

بند(۱): الف) برای هر عدد دلخواه x داریم: $3x=x+x+x$.

ب) برای هر عدد دلخواه x داریم: $0\times x=0$.

ج) برای هر عدد دلخواه x داریم: $x-x=0$.

بند(۲): الف) حاصلضرب هر عدد در خودش یا مثبت است یا صفر.

ب) حاصلضرب هر عدد در یک برابر همان عدد است.

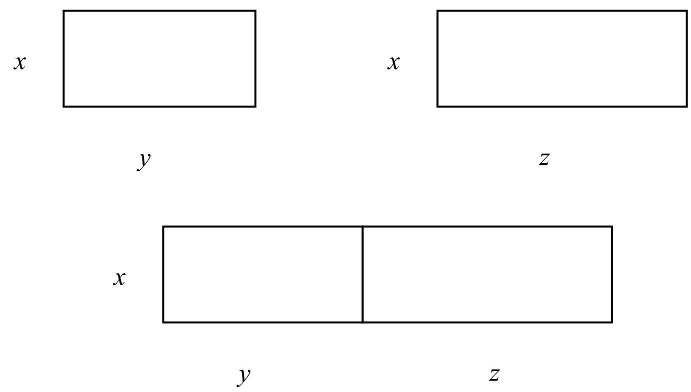
ج) اگر حاصلجمع عددی را با یک در چهار ضرب کنیم, حاصل برابر است با حاصلجمع چهار با چهار برابر آن عدد.

د) اگر حاصلضرب عددی در خودش را با یک جمع کنیم, حاصل از آن عدد بزرگتر می شود.

فعالیت صفحه ۲۵

هدف این فعالیت توجیه خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع از طریق هندسی و مساحت مستطیلها است. در این فعالیت دانش آموزان اجزای جمله $x(y+z)=xy+xz$ را به طور هندسی می توانند درک کنند و درستی این جمله را بپذیرند و همزمان توجه کنند که پشت سر جملات نمادین همواره معنایی وجود دارد که می توانند آن را پیدا کنند. جواب بندهای این فعالیت به شکل زیر است.

بندهای(۱) و (۲) و (۳):



بند(۴): مساحت مستطیلهای کوچکتر برابر xy و xz و مساحت مستطیل بزرگ برابر $x(y+z)$ است.

بند(۵): $xy + xz = x(y + z)$

بند(۶): حاصلضرب یک عدد در مجموع دو عدد دیگر برابر است با مجموع حاصلضرب آن عدد در آن دو عدد دیگر.

اولین تمرین در کلاس صفحه ۲۶

هدف این تمرین توسعه فعالیت قبلی است و در آن دانش آموزان رابطه های بیشتری را به دست می آورند و همزمان روی خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع تمرین می نمایند. جواب این تمرین به صورت زیر است.

بند(۱): شکلی که در فعالیت قبل رسم کرده اید می توانید مجددا رسم کنید.

بند(۲): $z = a + b$

بند(۳): تساوی $z(x + y) = zx + zy$ به صورت $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ در می آید.

بند(۴): با رسم خطهای موازی طول و عرض مستطیل از نقاط به دست آمده, مستطیلهای کوچکتری در آن ساخته می شود. تساویهای داده شده در این بند مربوط به تساوی مساحت مستطیل بزرگ با مجموع مساحت های مستطیلهایی است که در آن به وجود آمده است.

دومین تمرین در کلاس دوم صفحه ۲۶

هدف از این تمرین کار روی ترتیب عملیات چهار عمل اصلی است و جواب آن به صورت زیر است.

بند(۱): $(2 - 3) + 5$ ***بند(۲)***: $1 - (4 \times 6) + 3 - (5 \times 12)$ ***بند(۳)***: $-5 + (4 \div 2) + ((14 \div 2) \times 7)$

بند(۴): $x - (yz)$ ***بند(۵)***: $a - (bx) + (c(x + a))$ ***بند(۶)***: $(ab) - (cd) + (2(x + 1))$

مسائل صفحه ۲۷

مسئله ۱) الف) حاصلضرب مجموع دو عدد در تفاضل آن دو عدد برابر است با توان دوم عدد اولی منهای توان دوم عدد دومی.

ب) توان دوم حاصلضرب دو عدد برابر است با حاصلضرب توان دوم آن اعداد.

ج) توان دوم اعداد بزرگتر از یک, از یک بزرگتر است.

د) اگر توان دوم دو عدد مثبت مساوی باشند, آن دو عدد مساویند.

ه) اگر ضرب دو عدد صفر شود, حداقل یکی از آن دو عدد صفر است.

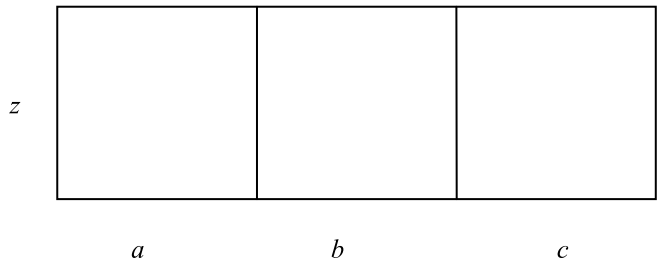
مسئله ۲) الف) مساحت مربعی به ضلع a برابر a^2 است.

ب) محیط مستطیلی با طول a و عرض b برابر $2a+2b$ است.

ج) مساحت مربعی به ضلع $a+b$ برابر a^2+b^2+2ab است.

د) وسط پاره خطی که دو سر آن نظیر اعداد a و b هستند, نظیر عدد $\frac{1}{2}(a+b)$ است.

مسئله ۳)



برای اثبات درستی تساوی, بدون استفاده از شکل بالا از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع می توانید استفاده کنید.

$$z(a+b+c) = z((a+b)+c)) = z(a+b) + zc = za + zb + zc$$

مسئله ۴)

$$\begin{aligned} &xa + xb = x(a+b) \\ &x^2a + x^2b = x^2(a+b) \\ &zy + zx = z(x+y) \\ &ab^2 + cb^2 = (a+c)b^2 \\ &a^2x^2 + cx^2 = (a^2+c)x^2 \\ &x^2 + x = x(x+1) \end{aligned}$$

مسئله ۵) در این مسئله تشخیص ترتیب عملیات مهم است و مثلا $-6 \div 2 \times 3 = ((-6) \div 2) \times 3$

ارزیابی یادگیری:

ترجمه بین جملات فارسی و جملات نمادین در ریاضی نشاندهنده میزان درک دانش‌آموز از عملکرد نماد است و از این

طریق می‌توان میزان یادگیری دانش آموز را از چگونگی به کار گیری نمادها ارزیابی کرد.

محدوده مطالب:

مفاهیم این بخش, مقدمات محاسبات نمادین و جبری است که در فصل‌های بعدی گسترش خواهد یافت. اما در این بخش کار کردن با نمادها فقط در حد بیان جملات ساده که به ریاضی نوشته شوند مطرح است و لزومی به انجام محاسبات چند مرحله‌ای روی یک عبارت نیست.

نکات مهم

در این بخش با نمادها بسیار کار می‌شود و لازم است که دانش‌آموزان نسبت به نمادها و کاربرد آنها در ساختن جملات درکی معنادار داشته باشند. برای همین مثال‌های هندسی بسیاری در این بخش استفاده شده است . بکارگیری نمادها برای بیان جملاتی که مستقیماً قابل مشاهده و درک هستند بسیار مهم است. این عمل موجب درک نمادها و فهم چگونگی به کارگیری آنها در بیان گزاره‌های ریاضی می‌شود.

سطح بالاتر:

در کتاب بیان جملات شرطی نیامده است و برای دانش‌آموزان قویتر می‌توان از نماد «$\Rightarrow$» برای بیان جملات شرطی استفاده کرد و جملات پیچیده را به زبان ریاضی بیان کرد. استفاده از نماد سورهای عمومی و وجودی $\forall$ و $\exists$ توصیه نمی‌شود و بهتر است آن قسمت از جملات که نیازمند سور است در زبان فارسی بیان شود و بقیه‌ی آن به زبان ریاضی نوشته شود.

برای بیان استنتاج نیز معمولاً از علامت «$\Rightarrow$» استفاده می‌شود که بهتر است برای روشن کردن تفاوت بین «$\Rightarrow$» به عنوان استنتاج و «$\Rightarrow$» به عنوان جمله شرطی ، اولی را بزرگتر و دومی را کوچکتر رسم کرد و به دانش‌آموز در مورد این تفاوت تذکر داد.

سؤالات نمونه فصل اول

۱- کلیه شکلهایی که از پهلوی هم قرار دادن چهار مربع واحد می توان ساخت به گونه ای که هر دو مربع مجاور حداقل در یک ضلع مشترک باشند بیابید. محیط و مساحت آنها را حساب کنید. کدامیک کمترین محیط را دارد؟

جواب: همه حالتها محیط ۱۰ واحد است مگر حالتی که یک مربع ساخته می شود که محیط ۸ واحد است.

۲- اگر در یک محور اعداد پاره خط واحد یک سانتی متر باشد و طول پاره خط AB برابر ۶ سانتی متر باشد و A نظیر ۵ باشد, B نظیر چه اعدادی می تواند باشد؟

۳- اگر A و B نظیر یکی از اعداد ۵ یا ۱- یا ۲- باشند طول پاره خط AB چه اعدادی می تواند باشد؟

جواب: باید کلیه حالتهای ممکن برای A و B را در نظر بگیریم که شش حالت می شود ولی به خاطر یکسانی فاصله A از B و B از A سه فاصله ۱, ۴, ۳ ایجاد می شود.

۴- نقاط A و B به ترتیب نقاط نظیر اعداد ۱ و ۳ هستند.

الف) نقطه C نظیر کدام عدد مثبتی است که طول پاره خط AC سه برابر طول پاره خط AB می شود؟

جواب: طول AB برابر ۲ است و سه برابر آن ۶ است پس C نظیر عدد ۷ باید باشد.

ب)) نقطه D که سمت چپ نقطه A قرار دارد نظیر کدام عددی است که طول پاره خط BD نصف طول پاره خط AB می شود؟

۵- آیا جمع و ضرب دو عدد اعشاری یک عدد اعشاری است؟ **جواب**: بلی

۶- آیا تقسیم دو عدد اعشاری بر هم همواره یک عدد اعشاری است؟ **جواب**: خیر مثلا $\frac{1}{3}$

۷- آیا نصف یک عدد اعشاری یک عدد اعشاری است؟ **جواب**: بلی زیرا تقسیم بر ۲ مانند ضرب در ۰/۵ است.

۸- آیا یک سوم یک عدد اعشاری لزوما یک عدد اعشاری است؟ **جواب**: خیر مثلا $\frac{1}{3}$

۹- یک عدد اعشاری کوچکتر از $0/0001$ مثال بزنید که تقسیم آن بر ۳ , عدد اعشاری باشد. **جواب**: ۰/۰۰۰۰۳

۱۰- وارون کدام اعداد اعشاری, عدد اعشاری است؟ **جواب**: اعداد به صورت $\frac{2^n}{5^m}$ و $\frac{5^n}{2^m}$

۱۱- عدد $\sqrt{5}$ – $\sqrt{8}$ را روی محور اعداد به دست آورید.

۱۲- کدام یک از اعداد $\sqrt{7}+1$ و $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ بزرگترند. ؟ **جواب**: توان دوم آنها را با هم مقایسه کنید.

۱۳- اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشندو طول پاره خط AB برابر $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ و A متناظر عدد $\sqrt{3}-1$ باشد، B متناظر چه اعدادی می‌تواند باشد.

جواب: با رسم روی محور مشخص می شود که تفاضل و مجموع این دو عدد را باید حساب کنیم که یکی $\sqrt{5}-1$ و دیگری $1+\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ است.

۱۴- دو عدد اعشاری بین اعداد اعشاری ۱/۸۱ و ۱/۸۲ بیابید. **جواب**: ۱/۸۱۱ و ۱/۸۱۲

۱۵- مستطیلی رسم کنید که طول و عرض آن عدد اعشاری باشد و مساحت آن ۳/۶ باشد. چند مستطیل با این خاصیت می‌توانید رسم کنید؟

جواب: باید عدد اعشاری ۳/۶ را به حاصلضرب دو عدد اعشاری تجزیه کنیم و این عمل به بینهایت طریق ممکن است مثلا

$$3/6=\frac{3/6}{2}\times 2=\frac{3/6}{4}\times 4=\frac{3/6}{5}\times 5=\frac{3/6}{10^n}\times 10^n$$

۱۶- یک مثلث قائم‌الزاویه بسازید که یک ضلع آن $\sqrt{3}$ باشد. از طریق این مثلث پاره‌خطی به طول $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بسازید.

جواب: قضیه هندسه که خط موازی ضلع سوم که یک ضلع را نصف کرده باشد ضلع دیگر را هم نصف می کند باید بکار برده شود.

۱۷- عدد $\sqrt{3}$ - $\sqrt{5}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

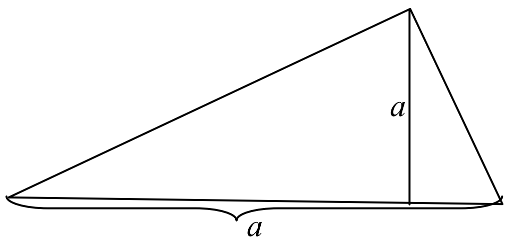
۱۸- مقدار های زیر را بدون استفاده از علامت قدر مطلق بنویسید. (محاسبه مقدارهای تقریبی مورد نظر نیست.)

$$\left|1-\sqrt{2}\right|= \qquad \left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}\right|= \qquad \left|-(1-\pi)\right|=$$

۱۹- تقریب اعشاری $\frac{5}{6}$ تا دو رقم اعشار چیست؟ از دو عدد ۰/۸۱ و ۰/۸۷ کدام یک به $\frac{5}{6}$نزدیکترند.

جواب: $\frac{5}{6} \approx 0/83$ پس این عدد به ۰/۸۱ نزدیکتر است.

۲۰- کلیه مثلث‌هایی که به شکل زیر هستند به زبان فارسی توصیف کنید.



جواب: مثلثهایی که ضلعی دارند که طول آن ضلع با طول ارتفاع وارد بر آن ضلع مساوی است.

۲۱- با استفاده از نمادهای حرفی, جملات فارسی زیر را به صورت ریاضی بنویسید.

الف) قدر مطلق هر عددی, مثبت یا صفر است. **جواب**: $|a|>0$ یا $|a|=0$

ب) قدر مطلق قرینه هر عددی برابر قدرمطلق همان عدد است. **جواب**: $|-a|=|a|$

ج) اگر عدد مثبتی با عدد دیگری جمع شود، حاصل‌جمع بزرگتر از عدد دوم است.

جواب: اگر a عدد مثبتی باشد و z عدد دلخواهی باشد داریم $z<a+z$

د) وارون هر عدد مثبتی ، مثبت است.

ه) توان دوم هر عدد با توان دوم قدر مطلق آن عدد مساوی است. . **جواب**: $a^2=|a|^2$