فصل سوم

توان رسانی و ریشه گیری

نگاه کلی به فصل سوم

اهداف کلی

۱) درک مفهوم توانهای (طبیعی، صفر، صحیح) اعداد

۲) آشنایی با قوانین اعمال (ضرب و تقسیم و جمع و تفریق) روی اعداد توان دار و به توان رساندن اعداد توان دار.

۳) مقایسه اعداد توان دار از طریق مقایسه توان آنها.

۴) مقایسه اعداد توان دار از طریق مقایسه پایه های آنها.

۵) آشنایی با نمایش علمی اعداد.

۶) تشخیص میزان بزرگی یا کوچکی اعداد از طریق نمایش علمی آنها.

۷) توجه به نقش توان در حل برخی از مسائل

۸) توجه به اهمیت نماد علمی به عنوان تسهیل کننده محاسبه و مقایسه در علوم مختلف

۹) درک مفهوم ریشه دوم و سوم اعداد.

۱۰)آشنایی با نماد و رادیکالهای با فرجه ۲, ۳ به عنوان ریشه دوّم و سوّم یک عدد.

۱۱)درک ارتباط بین قدر مطلق یک عدد و ریشه مثبت مجذور آن عدد.

۱۲)کسب مهارت انجام عملیات جبری روی اعداد رادیکالی.

۱۳)درک مفهوم گویا کردن مخرج یک کسر.

۱۴)درک مفهوم ساده کردن یک عبارت رادیکالی

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

۱- برخی از پدیده ها با استفاده از مفهوم توان توصیف کنند.

۲- توانهای یک عدد را محاسبه کنند.

۳- عملیات جبری با اعداد توان دار را انجام دهند.

۴- اعداد توان دار را با یکدیگر مقایسه کنند.

۵- توانهای مختلف اعداد را به یکدیگر تبدیل کنند.(مثال $2^6 = \left(2^2\right)^3$, $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$)

۶- اعداد اعشاری را در قالب نماد علمی نمایش دهند.

۷- اعداد در نمایش علمی را با یکدیگر مقایسه کنند.

۸-روی ریشه دوّم و سوّم اعداد محاسبه جبری کنند, مانند به توان رساندن.

۹- عبارات رادیکالی را ساده کنند.

۱۰-روی عبارت های رادیکالی عملیات جبری انجام دهند.

۱۱- مخرج کسرهای شامل یک رادیکال در مخرج را گویا کنند.

۱۲-ریشه دوم عبارات مجذور کامل را بنویسند.

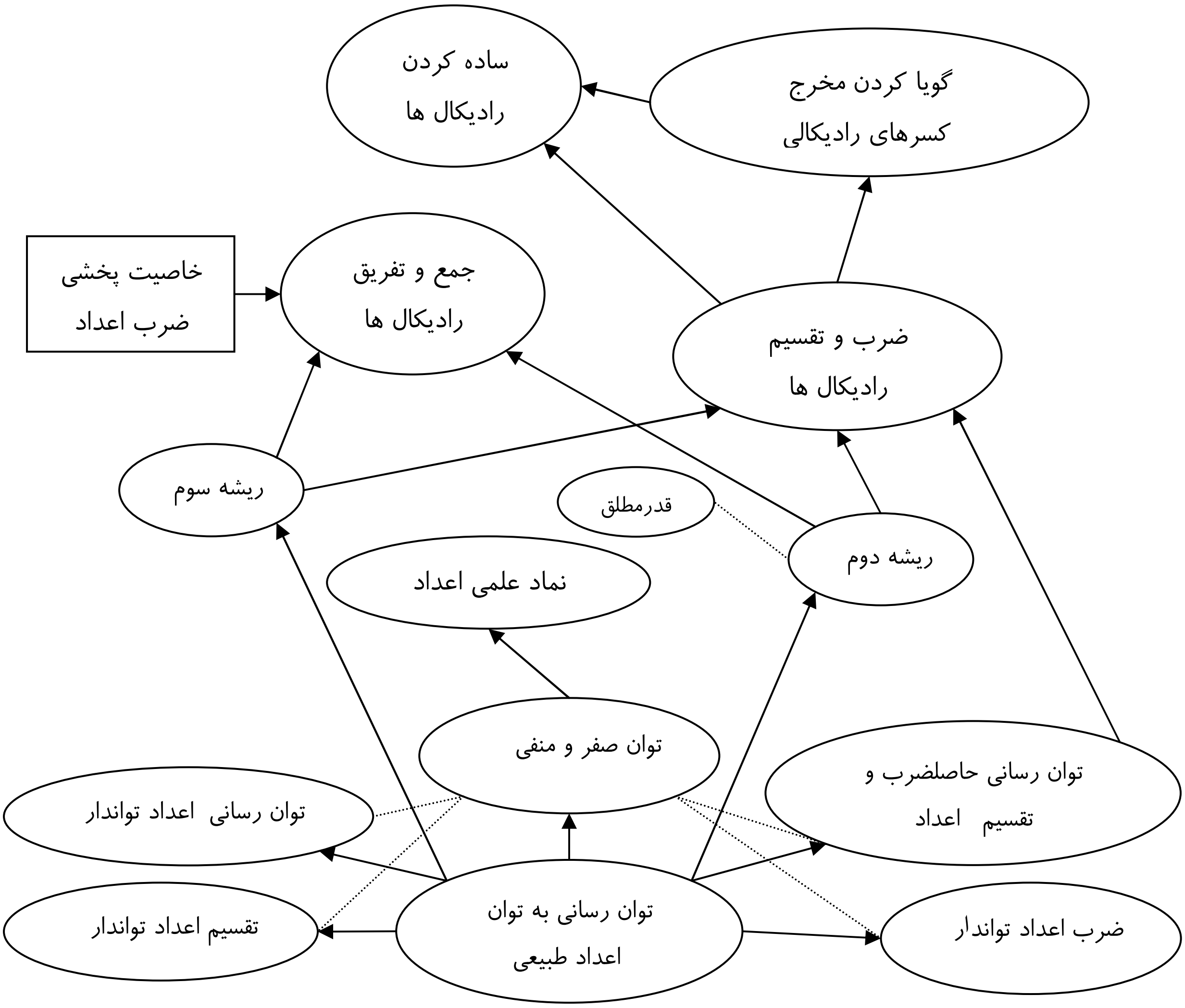
پیشنیازها

آشنایی با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد و خواص کلی آنها

زمانبندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می شود این فصل در ۳/۵ هفته تدریس شود.

طرح کلی فصل



روش آموزشی فصل سوم:

این فصل با ایجاد انگیزه مناسب برای درک مفهوم توان شروع می شود. در اولین فعالیت ضمن یادآوری تعریف توان در یک بستر واقعی و یادآوری قواعد محاسبه با اعداد توان دار، توانهای صفر و منفی از طریق الگو یابی طرح می شوند.

در بیان تعریف و مثالهای ضرب اعداد توان دار نسبت به دورۀ راهنمایی، توجه بیشتری به تجزیه و نوشتن یک عدد توان دار به صورت حاصلضرب دو یا چند عدد توان دار دیگر شده است.

علاوه بر این, مقایسه اعداد توان دار یک زمینه سازی مناسب برای ایجاد یک دید تابعی و آمادگی دانش آموزان برای مطالعه توابع نمایی در سال های بعد می باشد.

مبحث نماد علمی مربوط به نمایش خاصی از اعداد است که کاربرد آن بیشتر در علوم دیگر است. این شیوه نمایش ارتباط نزدیکی با نمایش توانی اعداد دارد.

ریشه گیری نیز یکی از مباحث دیگر این فصل است که با توجه به آشنایی قبلی دانش آموزان با ریشه دوّم مثبت یک عدد (تحت عنوان جذر) ریشه دوّم و سوّم با استفاده از توان دوّم و سوّم در یک بافت هندسی مطرح شده است و با استفاده از خواص کلی اعمال جبری , جمع، تفریق و ضرب و تقسیم رادیکالها بیان شده است.

رویکردهای آموزشی غالب در این فصل انجام فعالیت و الگویابی و تمرین در محاسبه می باشد.

آموزش بخشهای فصل سوم

بخش توان رسانی و قواعد آن

اهداف بخش:

- یادآوری توان رسانی به توان اعداد طبیعی و بیان نمادین خواص توان رسانی
- مقایسه اعداد تواندار وقتی پایه ها مساویند
- مقایسه اعداد تواندار وقتی توانها مساویند
- تعمیم توان رسانی به توان صفر و اعداد صحیح منفی و بیان نمادین خواص آن

پیش نیازها :

- آشنایی نسبی دانش آموزان با توانهای طبیعی اعداد
- آشنایی دانش آموزان با خاصیت جابه جایی، شرکت پذیری در ضرب اعداد حقیقی

آموزش فصل سوم

- آشنایی با ترتیب عملیات

ارزشیابی تشخیصی

مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \qquad (-3)\times(-3)\times(-3) \qquad 0/1\times 0/1$$

واژه های کلیدی:

پایه، توان، توان صفر و توان منفی

نگاه کلی به بخش:

این بخش با یک فعالیت محاسباتی آغاز می شود که در یک زمینه واقعی طرح شده است. با انجام این فعالیت دانش آموز به طور عملی درگیر محاسبات توانی می شود و در ادامه شیوه نمایش محاسبات توانی طرح می شود که قبلا هم در دوره راهنمایی با آن آشنا بوده است. البته در اینجا شیوه نمایشهای نمادین توان رسانی به کار گرفته می شود و روی آن تمرین می شود.

سپس خواص اساسی توان رسانی از طریق مشاهده مثالها و انجام فعالیتها توجیه و به طور نمادین بیان می شوند.

ورود به مطلب:

قسمت اول این بخش جنبه یادآوری دارد و دانش آموزان فبلا با آن آشنایی دارند. با اینحال مناسب است تعریف توان رسانی را با تعریف ضرب مقایسه کنید. عمل ضرب همان عمل جمع است که چندبار تکرار شده است.

$$\overbrace{m+\cdots+m}^{n} = n\times m$$

عمل توان رسانی نیز همان عمل ضرب است که چندبار تکرار شده است.

$$\overbrace{m\times\cdots\times m}^{n} = m^{n}$$

البته بیان این مطالب نباید به شکل صوری بالا باشد و با مثالهای عددی باید انجام شود. سپس می توان وارد فعالیت های کتاب شد و اهمیت این عمل را در فعالیت ها مشاهده کرد.

برای ورود به مفهوم توان صفر و توان منفی می توان از ایده تعمیم دادن و طرح این سوال که «آیا تعمیم ممکن است؟» شروع کرد. مناسب است با ذکر مشابهت تعریف توان رسانی و تعریف عمل ضرب, ابتدا چگونگی انجام این تعمیم در عمل ضرب بحث شود. یعنی چگونگی تعریف ضرب در صفر و ضرب در اعداد منفی به بحث گذاشته شود و از طریق الگویابی (در راهنمای تدریس فصل اول آورده شده است) این عمل تعمیم صورت بگیرد و سپس با همان روش به تعمیم عمل توان رسانی به توان صفر و اعداد منفی پرداخته شود. فعالیتهای کتاب نیز به همین صورت عمل کرده است.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب به فعالیت زیر در متن کتاب می رسیم که اهداف آن یادآوری نمایش اعداد توان دار و مدلسازی پدیده طبیعی تقسیم سلولی و کاربردهای نمایش توانی است.

دانش آموزان با حل این فعالیت نمایش حاصلضرب اعداد به صورت یک عدد توان دار را که در دوره راهنمایی آموزش دیده اند مرور خواهند کرد و در پرسش ۳ یکی از مزایای استفاده از توان (علاوه بر تسهیل در نوشتن) را می آموزند. معلم برای تسهیل در نمایش توانی اعداد می تواند یک سطر به جدول اضافه نماید و اعداد را به صورت توانهای ۲ نمایش دهد ضمناً برای آمادگی دانش آموزان جهت انجام مقایسه که در صفحه ۵۰ می آید توصیه می شود معلم توجه دانش آموزان را به افزایش مقدار عدد با افزایش توان آن جلب نماید.

فعالیت صفحه ۵۰

بند(۱): تکمیل شده جدول به شکل زیر است.

واحد زمانی	۰	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷
تعداد	۱	۲	٤	۸	۱٦	۳۲	٦٤	۱۲۸
تعداد به صورت یک عدد توان دار		2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7

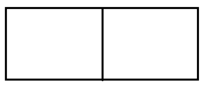
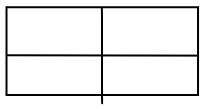
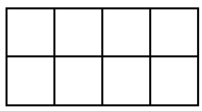
بند(۲): پس از ۷ واحد زمانی ۱۲۸ موجود تک سلولی تولید می شود، 2^7

بند(۳): پس از ۵ واحد زمانی تعداد موجودات تک سلولی به ۳۲ می رسد با ادامه جدول ملاحظه می شود پس از ۵ بار دو برابر شدن عدد ۳۲ به دست می آید.

در صورت نیاز به کار بیشتر یا نیاز به یک فعالیت دیگر می توانید از فعالیت زیر استفاده کنید.

فعالیت جایگزین(تا کردن کاغذ) :

فرض کنید می خواهیم یک قطعه کاغذ را چندین بار به دو قسمت مساوی تا کنیم و در هر ناحیه ایجاد شده شماره دانش آموز (یا نام دانش آموز) را بنویسیم. هر ناحیه را برای نوشتن فقط یک نام استفاده می کنیم و برخی از نواحی را می توانیم خالی بگذاریم. جدول زیر را تکمیل کنید.

شکل کاغذ	تعداد نواحی	تعداد تا کردنها
	۱	۰
	۲	۱
	۴	۲
	۸	۳
		۴
		۵

۱) پس از ۶ بار تا زدن چند ناحیه ایجاد می شود؟

۲) برای نوشتن نام دانش آموزان یک کلاس ۳۲ نفری چند بار تا زدن لازم است.

در صورتی که زمان کافی در اختیار باشد معلم می تواند با اضافه کردن یک ستون به جدول مساحت هر کدام از ناحیه های کوچک را با مساحت ناحیه اول مقایسه نماید. در این صورت کاربردی از توانهای طبیعی اعداد با پایه کسری خواهیم داشت.

پس از طرح چند مثال و بیان نمادین تعریف توان رسانی به فعالیت صفحه ۴۷ می رسیم که هدف آن درک قاعده ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی و ایجاد مهارت در تجزیه یک عدد توان دار است.

فعالیت صفحه ۵۱

دانش آموزان با ملاحظه تساوی نمونه, محل های نقطه چین را باید با اعداد توان دار تکمیل کنند. معلم می تواند در بند ۳ با اضافه کردن تساوی هایی نظیر : $8^1 \times ... \times ... =$ به انتهای سطر اول و $b^3 \times ... \times ... \times ... =$ به انتهای سطر آخر , با ذکر این که عبارت های هر نقطه چین در هر سطر مساوی است نمونه هایی از تجزیه یک عبارت به بیش از دو عبارت توان دار را ذکر نماید.

$$1)\ 5^6 = 5^5 \times 5^1 = 5^4 \times 5^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^2 \times 5^4 = 5^1 \times 5^5$$
$$2)\ 7^4 = 7^3 \times 7^1 = 7^2 \times 7^2 = 7^1 \times 7^3$$
$$3)\ 8^5 = 8^3 \times 8^2 = 8^4 \times 8^1 = 8^3 \times 8^2 = 8^4 \times 8^1$$
$$3^8 = 3^4 \times 3^4 = 3^5 \times 3^3 = 3^2 \times 3^6 = 3^7 \times 3^1$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{10} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^6 = (0/4)^5 \times (0/4)^5$$
$$a^7 = a^6 \times a^1 = a^4 \times a^3 = a^5 \times a^2 = a^3 \times a^4$$
$$b^9 = b^4 \times b^5 = b^2 \times b^7 = b^3 \times b^6 = b^8 \times b^1$$

در صورت قویتر بودن دانش آموزان می توانید از فعالیت زیر برای درک خواص بالا استفاده کنید.

فعالیت جایگزین :

تعداد سلول های اولیه در فعالیت اول را A در نظر بگیرید.

۱) تعداد سلولهای تولید شده توسط A سلول پس از ۲ مرحله تکثیر را بدست آورید.

۲) اگراین A سلول توسط یک سلول پس از ۶ واحد زمانی بدست آمده باشند A را بر حسب توانی از ۲ بنویسید.

۳) تعداد سلولهای تولید شده از یک تک سلولی پس از ۸ واحد زمانی را بنویسید.

۴) نتایج قسمت ۱ و ۳ را با یکدیگر مقایسه کنید و تساوی مربوط به آن را بنویسید. چه نتیجه ای می گیرید؟

در این فعالیت مجدداً با نوعی مدلسازی برای بیان قاعده ضرب اعداد توان دار روبرو هستیم و بدون استفاده مستقیم از خاصیت شرکت پذیری در ضرب و تمرکز بر تجزیه این قاعده بیان شده است.

پس از بررسیهای بالا خاصیت مهم توان رسانی به طور نمادین بیان شده است و برای ارزیابی یادگیری دانش آموزان به تمرین درکلاس صفحه ۵۱ می رسیم. در این تمرین در کلاس, مفهوم توان رسانی و قاعده ضرب اعداد توان دار تمرین می شود و همزمان به تعمیم ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی به ضرب سه عدد و استفاده از نمادهای جبری نیز پرداخته می شود. با توجه به این که هر تمرین با هدف خاصی مطرح می شود و از ساده به مشکل مرتب شده اند, در صورتی که دانش آموز در حل یک تمرین با مشکل مواجه گردید توصیه می شود که معلم با ارائه توضیحات لازم تمرین مشابهی را برای حل جهت دانش آموز در کلاس مطرح نماید. حل دو تمرین آخر(استفاده از نمادهای جبری) نیاز به تسلط بر تمرین های قبل دارد و این تمرین در فصول بعد کاربرد بیشتری دارند بنابراین کسب مهارت در حل این تمرین توسط دانش آموز از اهمیت ویژه ای برخوردار است و معلم می تواند مثالهایی از این نوع برای تقویت مهارت دانش آموزان در کلاس ارائه دهد. ضمناً توصیه می شود پس از حل این دو قسمت معلم با روش پرسش و پاسخ تعمیم قاعده ضرب اعداد توان دار را از طریق ضرب دو عدد به چند عدد مطرح سازد.

در سالهای قبل معمولا تساوی $a^n \times a^m = a^{m+n}$ به صورت $a^{n+m} = a^n \times a^m$ نوشته می شد که هر دو صحیح است ولی در اولی یک عمل تجزیه دیده می شود و در دومی یک عمل ضرب دیده می شود که لازم است از هر دو طریق دانش آموزان با این تساویها کار کنند.

تمرین در کلاس صفحه ۵۱

الف) $\overbrace{4\times4\times...\times4}^{50}=4^{50}$

ب) $2^6\times2^7=2^{6+7}=2^{13}$

ج) $9\times3^4=3^2\times3^4=3^6$

د) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\times(0/5)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^7=(0/5)^7$

ه) $3^2\times3^4\times3^5=(3^2\times3^4)\times3^5=3^6\times3^5=3^{11}$

و) $a^2\times a^3\times a^4=(a^2\times a^3)\times a^4=a^5\times a^4=a^9$

ز) $a^m\times a^n\times a^k=(a^m\times a^n)\times a^k=a^{m+n}\times a^k=a^{m+n+k}$

پس از این تمرین یک تذکر ساده در مورد مفهوم تجزیه اعداد داده می شود و به یک اشتباه رایج اشاره می شود.

توجه کنید : $a^n+a^m\neq a^{n+m}$ **(صفحه ۵۱)**

معمولاً دانش آموزان در استفاده از قاعده ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی دچار اشتباه شده و این قاعده را در مورد جمع نیز به کار می برند. ذکر این مطلب برای توجه بیشتر دانش آموزان و جلوگیری از اشتباه لازم است در صورتی که معلم زمان کافی در اختیار دارد توصیه می شود این هشدار به عنوان نتیجه فعالیت زیر که توسط دانش آموزان در کلاس انجام می شود، بیان شود.

فعالیت :

۱) در هر یک از دو عبارت 2^4+2^3 , 2^{3+4} مشخص کنید که آیا ابتدا عمل جمع انجام می شود یا به توان رساندن.

۲) با به دست آوردن مقدارهای 2^4+2^3 , 2^{3+4} مشخص کنید این دو مقدار مساویند یا خیر.

۳) نتیجه کلی را با استفاده از نمادها نمایش دهید.

البته معلم می تواند با ارائه نابرابری کتاب از دانش آموزان بخواهد رابطه بین دو عبارت را در مورد چند عدد خاص بررسی کنند (یعنی از کل به جزء) . برای بیان قواعد دیگر توانها با توجه به ارائه آنها در دورهٔ راهنمایی و محدودیت زمانی در کتاب از فعالیت استفاده نشده است همانطور که دیده می شود نحوه ارائه مطالب رسیدن به

قواعد به گونه ای است که معلم می تواند آنها را در قالب فعالیت بیان نماید یا خواص استفاده شده در هر قسمت (جابه جایی در ضرب و . . .) را از دانش آموزان بپرسد.

تمرین در کلاس صفحه ۵۳

در تمرین۱ , استفاده از قوانین توانها در حالات مختلف مورد نظر است، قسمت $18,16,10,6,5,4$ به دلیل استفاده از نمادها از اهمیت ویژه ای برخوردارند و در صورتیکه دانش آموز در حل هر قسمت با مشکل مواجه شد کمک معلم و ارائه تمرین های مشابه توسط معلم توصیه می شود.

حل تمرین های $4,3,2$ دانش آموزان را به رابطه ی نابرابری که در 'توجه کنید' همین صفحه آمده است هدایت می نماید، و دلایل نابرابری را بیان می کند.

بند(۱) :

$1)\ 6^{15} \div 6^{8} = 6^{15-8} = 6^{7}$

$2)\left(\frac{1}{4}\right)^{7} \div (0/25)^{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4}$

$3)\ (6^{3} \times 6^{7}) \div 6^{4} = 6^{10} \div 6^{4} = 6^{6}$

$4)\ a^{5} \div a^{3} = a^{5-3} = a^{2}$

$5)\ b^{m+4} \div b^{3} = b^{(m+4)-3} = b^{m+1}$

$6)\ x^{n+7} \div x^{n+4} = x^{(n+7)-(n+4)} = x^{\cancel{n}+7-\cancel{n}-4} = x^{3}$

$7)\ 4^{3} \times 5^{3} = (4\times5)^{3} = 20^{3}$

$8)\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times 5^{4} = \left(\frac{1}{2}\times5\right)^{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4}$

$9)(6^{3} \times 6) \times 2^{4} = 6^{4} \times 2^{4} = 12^{4}$

$10) 8a^{3} = 2^{3} a^{3} = (2a)^{3}$

$11)\ 2^{3} \times 3^{3} \times 5^{3} = (2\times3\times5)^{3} = 30^{3}$

$12) 27\times5^{3} = 3^{3} \times 5^{3} = 15^{3}$

$13) 6^{3} \div 2^{3} = 3^{3}$

$14) 2^{7} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{7} = \left(2\div\frac{1}{3}\right)^{7} = \left(2\times\frac{3}{1}\right)^{7} = 6^{7}$

$15)\frac{4^{5}\times2^{5}}{8^{2}} = \frac{8^{5}}{8^{2}} = 8^{5} \div 8^{2} = 8^{3}$

$16)\frac{16a^{4}}{3^{4}} = \frac{2^{4}a^{4}}{3^{4}} = \left(\frac{2a}{3}\right)^{4}$

$17) a^{3} \times \frac{8b^{3}}{27} = a^{3} \times \frac{2^{3}b^{3}}{3^{3}} = \left(\frac{2ab}{3}\right)^{3}$

$18)\frac{2\times8^{2}\times12^{3}}{4^{5}} = \frac{2\times(2\times4)^{2}\times(3\times4)^{3}}{4^{5}} = \frac{2\times2^{2}\times4^{2}\times3^{3}\times4^{3}}{4^{5}} = \frac{2^{3}\times3^{3}\times4^{5}}{4^{5}} = \frac{6^{3}\times\cancel{4^{5}}}{\cancel{4^{5}}} = 6^{3}$

بند(۲): در عبارت $4^{3} + 3^{2}$ ابتدا عمل توان رسانی انجام می شود و در عبارت $(4+3)^{2}$ ابتدا عمل جمع انجام می شود.

بند(۳): $4^2+3^2=16+9=25$ و $(4+3)^2=7^2=49$ پس $(4+3)^2 \neq 4^2+3^2$.

بند(٤): درعبارت 4^2-3^2 ابتدا عمل توان رسانی انجام می شود و در عبارت $(4-3)^2$ ابتدا عمل تفریق انجام می شود.

$$\left.\begin{array}{l} 4^2-3^2=16-9=7 \\ (4-3)^2=1^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4^2-3^2 \neq (4-3)^2$$

پس از این تمرین در کلاس به فعالیت صفحه ۴۹ می رسیم که اهداف آن بررسی قاعده توان رسانی اعداد توان دار و عبارات توان دار با استفاده از مفهوم توان و قواعد ضرب اعداد توان دار است.

فعالیت صفحه ۵۳

دانش آموزان باملاحظه تساوی های ارائه شده در فعالیت، و با استفاده از مفهوم توان رسانی و قاعده ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی نقطه چین ها را تکمیل می کنند.

بند(۱):

$$\begin{array}{l} (2^3)^4=2^3\times2^3\times2^3\times2^3=2^{3+3+3+3}=2^{3\times4} \\ (a^4)^3=a^4\times a^4\times a^4=a^{4+4+4}=a^{4\times3} \\ (a^n)^4=a^n\times a^n\times a^n\times a^n=a^{n+n+n+n}=a^{4\times n} \end{array}$$

پس از این فعالیت نتیجه کلی گرفته شده است ولی توصیه می شود معلم قبل از ارائه فرمول نهایی, توجه دانش آموزان را به رابطه بین توان ها جلب نماید و با ارائه چند پرسش عددی به صورت $(2^3)^4=2^{\cdots}$,

$((\frac{1}{3})^5)^3=(\frac{1}{3})^{\cdots}$ از دانش آموزان بخواهید عبارت $(b^k)^n=b^{\cdots}$ را تکمیل کنند.

تمرین در کلاس صفحه ۵۴

تمرین های ۱ و ۲ برای ایجاد مهارت در استفاده از مفهوم توان و قواعد ضرب اعداد توان دار و به توان رسانی اعداد توان دار می باشند و حل تمرین ۳ دانش آموزان را به رابطه نابرابری ارائه شده در همین صفحه (که اشتباه مصطلح میان دانش آموزان است) هدایت می نماید.

بند(۱): $27^5=(3^3)^5=3^{3\times5}=3^{15}$

بند(۲): الف) $2^6 \times \left(2^3\right)^4 = 2^6 \times 2^{12} = 2^{6+12} = 2^{18}$

ب) $3^5 \times 27^2 = 3^5 \times \left(3^3\right)^2 = 3^5 \times 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$ ج) $\left(a^5\right)^3 \times \left(b^3\right)^5 = a^{15} \times b^{15} = \left(ab\right)^{15}$

بند(۳): $\left.\begin{array}{l} \left(2^2\right)^3 = 2^{2\times3} = 2^6 \\ 2^{\left(2^3\right)} = 2^8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(2^2\right)^3 \neq 2^{\left(2^3\right)}$

فعالیت صفحه ۵۴

بند ۱) $2^5 = 32\ ,\ 2^4 = 16\ ,\ 2^3 = 8\ ,\ 2^2 = 4$ پس $2^5 > 2^4 > 2^3 > 2^2$.

بند ۲) هر چه توان بالاتری از ۲ را حساب کنیم حاصل بزرگتر می شود زیرا در هر مرحله عدد قبلی را دو برابر می کنیم.

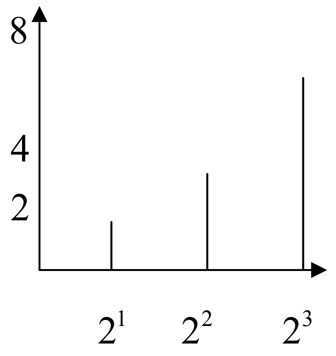
بند ۳) $4^2 = 16\ ,\ 3^2 = 9\ ,\ 2^2 = 4$ پس $4^2 > 3^2 > 2^2$.

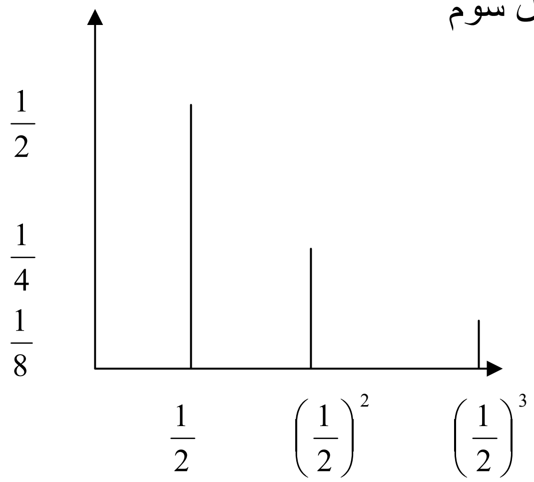
بند ۴) چون ۲ از ۳ کوچکتر است 2^n نیز از 3^n باید کوچکتر شود. مثلا به ازای $n = 4$ و $n = 5$ داریم

$$2^4 = 16\ ,\ 3^4 = 81 \qquad\qquad 2^5 = 32\ ,\ 3^5 = 243$$

پس از این فعالیت نتیجه گیری کلی به عمل آمده است و در مثالها توضیح داده شده است. تشخیص افزایش یا کاهش اعداد با افزایش یا کاهش توان موجب درک بهتر عمل توان رسانی است و در محاسبات اهمیت بسیاری دارد. این عمل همچنین زمینه سازی مناسبی برای معرفی تابع نمایی در سال های آینده است. برای مقایسه اعداد با پایه مساوی می توان از ارتباطات کلامی نیز استفاده کرد مثلاً : عدد 2^{13} دو برابر عدد 2^{12} است پس از آن بزرگتر است . یا عدد $\left(\frac{1}{2}\right)^{17}$ نصف عدد $\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$ است پس از آن کوچکتر است.

ضمناً برای مقایسه و توجه دانش آموزان به رشد این اعداد می توان از نمودار هایی به شکل زیر استفاده کرد.





مسائل صفحه ۵۵

مسئله ۱) الف: $(-4)^3$ ب: $(-0/03)^3$ ج: $(\frac{1}{5})^4$ د: $(\sqrt{3})^5$ ه: $(\frac{a}{2})^5$ و: $(a+b)^3$ ز: $(a^2+1)^4$

مسئله ۲) الف: $(\frac{7}{24})^7$ ب: 1 ج: x^{10} د: $(xyz)^4$ ه: $(\frac{1}{2})^7$ و: 12^9 ز: $(\frac{a}{2})^6$ ح: 36^{15} ط: 12^3

مسئله ۳) الف: $8^3 \times 8^3$ ب: $4^6 \times 2^6$ ج: $8^2 \times 8^4$ د: $8^2 \times 8^2 \times 8^2$ ه: $8^2 \times 8^2 \times 8^2$

مسئله ٤) الف: 3^4 ب: 2^6 ج: 30^{10} د: $(ab)^9$ ه: $(\frac{xy}{z})^3$

مسئله ۵) الف: 50 ب: $\frac{3}{2}$ ج: $\frac{1}{5}$.

مسئله ٦) می توانیم تمام این اعداد را با توان یکسان ۳ بنویسیم. در واقع $16^3 = (2^4)^3 = 2^{4\times3} = 2^{12}$. بنابراین

$$2^{12} = 16^3 < 25^3 < 36^3$$

مسئله ای از مفتاح المعاملات

این دهلیزها راهروهایی تو در تو هستند که با هر بار خروج از آنها شخص باید نیمی از میوه ها را روی زمین بگذارد و در خروج از آخرین راهرو یک میوه برای او باقی بماند. برای حل این مسئله اگر حرکت شخص را در جهت عکس در نظر بگیریم فردی را می بینیم که یک میوه دارد و با ورود به هر راهرو آنقدر میوه به او می دهند تا تعداد میوه هایش دو برابر شود یعنی به همان اندازه که میوه دارد به او میوه می دهند. پس با خروج از اولین راهرو ۲ میوه دارد و با خروج از دومین راهرو ۴ میوه دارد و نهایتا پس از خروج از هفتمین راهرو $2^7 = 128$ *میوه خواهد داشت. پس این شخص باید ۱۲۸ میوه بچیند تا با انجام عملیات گفته شده نهایتا یک میوه برای او بماند.*

در قسمت بعد به تعمیم مفهوم توان به توان صفر و توانهای اعداد صحیح منفی می رسیم.

فعالیت توان صفر (صفحه ۵۶)

دانش آموزان با تکمیل جدول به رابطه میان اعداد سطر دوم (که هر کدام از تقسیم عدد سمت چپ بر عدد ۳ به دست آمده است) دقت می کنند و با استفاده از این رابطه مقدار مناسب برای 3^0 را حدس می زنند.

۱- جدول تکمیل شده به صورت زیراست :

عدد توان دار	3^4 3^3 3^2 3^1
حاصل	81 27 9 3

۲- در سطر دوم هر عدد از تقسیم عدد سمت چپ بر عدد 3 بدست آمده است.

$...3^1$	3^0
$...3$	1

۳-برای 3^0 با توجه به الگوی قبلی عدد $1 = 3 \div 3$ حدس زده می شود.

عدد توان دار	6^4 6^3 6^2 6^1 6^0
حاصل	1296 216 36 6 1

$\div 6$ $\div 6$ $\div 6$ $\div 6$

عدد توان دار	2^4 2^3 2^2 2^1 2^0
حاصل	16 8 4 2 1

$\div 2$ $\div 2$ $\div 2$ $\div 2$

عدد توان دار	a^4 a^3 a^2 a^1 a^0
حاصل	a^4 a^3 a^2 a 1

$\div a$ $\div a$ $\div a$ $\div a$

همانطور که ملاحظه می گردد چون در جدول این قسمت از یک عدد دلخواه استفاده شده است, می توان یک نتیجه گیری کلی انجام داد.

توجه کنید که نتیجه گیری کتاب به صورت « ... مناسب است .... تعریف کنیم $a^0 = 1$» آمده است نه این که «نتیجه می شود ... $a^0 = 1$». در مواردی که تعریفی تعمیم می یابد معمولا هدف آن است که خواص اساسی آن

مفهوم پس از تعمیم همچنان برقرار بمانند. ولی اگر فقط تعمیم مورد نظر است و هیچ شرطی را نخواهیم برآورده کنیم به هر شکلی و بی هیچ محدودیتی می توان به شکلهای مختلف تعمیم را انجام داد, این عمل مربوط به نتیجه گیریهای منطقی نیست و سلیقه های فردی می تواند دخالت داشته باشد. اما اگر می خواهیم پس از تعمیم شرایط خاصی برآورده شود , باید تعمیم به یک شکل خاص و مناسب انجام شود. بنابراین پس از بررسیهایی که انجام می دهیم اگر به نتیجه مطلوب برسیم می گوییم «مناسب است تعریف این گونه انجام شود».

در تعمیم مفهوم توان رسانی هدف اصلی حفظ قواعد اساسی توان رسانی است و دلیل آن که می خواهیم الگوی تغییرات توانهای یک عدد ثابت بماند حفظ قواعد اساسی توان رسانی است(صفحه ۵۸). بنابراین سعی می کنیم در تعمیم مفهوم توان رسانی این الگوها حفظ شوند و به همین خاطر خواهیم دید که خواص توان رسانی هم محفوظ می مانند.

یک روش دیگر برای ارائه تعریف توان صفر , تقسیم یک عدد توان دار برخودش و سعی در برقرار نگه داشتن قاعده تقسیم توانهاست. می توان از دانش آموزان سؤال کرد که چگونه می توان توان صفر یک عدد را تعریف کرد به گونه ای که قاعده تقسیم توانها برقرار بماند. ($a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$:)

در ادامه کتاب به فعالیت مربوط به تعمیم توان رسانی به توانهای منفی می رسیم.

فعالیت توان منفی (صفحه ۵۷)

مانند فعالیت قبل با پیدا کردن رابطه میان اعداد سطر دوم جدول، دانش آموزان توانهای منفی را حدس می زنند نوشتن اعداد سطر دوم به صورت کسری (برای هدایت به تعریف توان منفی) الزامی است.

بند(۱): جدول تکمیل شده :

اعداد توان دار	3^0	3^1	3^2	3^3
حاصل	1	3	9	27

بند(۲): هر عدد از تقسیم عدد سمت چپ بر ۳ بدست آمده است.

بند(۳): عدد $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ مناسب است.

بند(۴):

اعداد توان دار	6^3 6^2 6^1 6^0 6^{-1}
حاصل	216 36 6 1 $\frac{1}{6}$

اعداد توان دار	2^3 2^2 2^1 2^0 2^{-1}
حاصل	8 4 2 1 $\frac{1}{2}$

بند(۵):

اعداد توان دار	a^3 a^2 a^1 a^0 a^{-1}
حاصل	a^3 a^2 a 1 $\frac{1}{a}$

بند(۶):

$$a^{-2} = \frac{1}{a} \div a = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$$
$$a^{-3} = \frac{1}{a^2} \div a = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}$$

مثالهای ارائه شده در این صفحه تبدیل توان منفی اعداد مختلف (طبیعی، اعشاری، صحیح) را به توان مثبت نشان می دهد.

تمرین در کلاس صفحه ۵۷

بند(۱): الف) $0/001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ ب) $0/25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

ج) $\frac{1}{4^5} = 4^{-5}$ د) $\frac{1}{b} = b^{-1}$ ه) $\frac{1}{b^3} = b^{-3}$

بند(۲): سؤال دوم برای ارزیابی مهارت در تبدیل توان منفی به توان مثبت است

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ ب) $\left(\sqrt{7}\right)^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{7})^5}$ ج) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1^3}{2^3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 2^3$ د) $2\pi^{-3} = 2\times\frac{1}{\pi^3} = \frac{2}{\pi^3}$

بند(۳): سؤال سوم ارزیابی از هر دو مهارت تبدیل توان مثبت به توان منفی و توان منفی به توان مثبت است.

الف) $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ ب) $\frac{1}{b^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{b^2}} = b^2$ ج) $\frac{-1}{b^2} = -b^{-2}$ د) $\frac{\pi^2}{\pi^{-3}} = \pi\frac{1}{\pi^{-3}} = \pi^2\times\pi^3 = \pi^5$

بند(۴):در سؤال ۴ تعمیم قاعده توان رسانی اعداد توان دار مورد نظر است :

$$\left.\begin{array}{l} 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \\ \left(4^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \\ \left(4^2\right)^{-1} = (16)^{-1} = \frac{1}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow 4^{-2} = \left(4^{-1}\right)^2 = \left(4^2\right)^{-1}$$

توصیه می شود معلم در این قسمت این تعمیم را ذکر نماید و در صورتی که زمان کافی در اختیار دارد با ذکر چند مثال دیگر شواهدی بر درست بودن این رابطه ذکر نماید.

بند(۵): در سؤال ۵ مقایسه اعداد توان دار مطرح هستند. اعداد داده شده را می توان به دو صورت در نظر گرفت. می توان آنها را به صورت اعداد مثبت کمتر از ۱ در نظر گرفت که به توانهای مثبت مختلفی رسیده اند. همچنین می توان آنها را به عنوان اعداد مثبت بزرگتر از ۱ در نظر گرفت که به توانهای منفی مختلفی رسیده اند. در هر صورت ابتدا مقدار این اعداد را به شکلی که بتوان آنها را با هم مقایسه کرد, حساب می کنیم و آنها را با یکدیگر مقایسه می کنیم. سپس آنها را به صورت اعداد توان دار می نویسیم و الگوی به دست آمده برای بزرگتر شدن یا کوچکتر شدن این اعداد را وقتی پایه یکسان است ولی توانها تغییر می کنند به دست می آوریم. درستی این الگو و نتیجه گیری را در صورت امکان برای دانش آموزان استدلال باید کرد.

$$(0/125)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\left(\frac{1}{2^3}\right)^3=\frac{1}{2^9}=2^{-9}$$
$$(0/25)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{1}{2^2}\right)^4=\frac{1}{2^8}=2^{-8}$$
$$(0/5)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$$

می دانیم $2^9>2^8>2^3$, پس $\frac{1}{2^9}<\frac{1}{2^8}<\frac{1}{2^3}$ در نتیجه $2^{-9}<2^{-8}<2^{-3}$.

برای مقایسه توانهای منفی لازم است توجه دانش آموزان را به این نکته جلب کرد که مثلاً 2^{-8} دو برابر 2^{-9} است پس از آن بزرگتر است. بنابراین برای توانهای منفی نیز وقتی پایه عددی بزرگتر از ۱ است با افزایش توان آن عدد (چه مثبت و چه منفی) مقدار آن افزایش می یابد.

در تمرین در کلاس های این قسمت به دلیل استفاده از استدلال پیچیده تر در سؤال های ۴ و ۵ دخالت و توضیحات بیشتر معلم در فرآیند حل این دو قسمت در کلاس توصیه می شود.

پس از این تمرین, تعمیم قواعد توان رسانی از اعداد با توان طبیعی به توان صحیح به صورت نمادین ارائه شده است.

مسائل صفحه ۵۹

مسئله ۱) در این مسئله مهارت تبدیل توان مثبت به توان منفی در حالات عددی و نمادین و تبدیل نمایش دهدهی به کسری (که برای تبدیل توان مثبت به منفی لازم است) مورد نظر می باشد.

الف) $0/00001=\frac{1}{100000}=\frac{1}{10^5}=10^{-5}$ ب) $\frac{1}{bc}=(bc)^{-1}$

ج) $0/008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}=\frac{1}{5^3}=5^{-3}$ د) $\frac{1}{3^{11}}=3^{-11}$

مسئله ۲) در این مسئله مهارت تبدیل از توان منفی به توان مثبت و ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی و توان منفی و ضرب اعداد توان دار با توان مساوی مورد نظر است.

الف) $3^{-5}=\frac{1}{3^5}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$ ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=\frac{1^{-4}}{5^{-4}}=\frac{1}{5^{-4}}=5^4$

ج) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+(-4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = \frac{1}{2^{-7}} = 2^7$ د) $a^{-2} \times b^{-2} = (ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = (\frac{1}{ab})^2$

ه) $a^{-3} \times b^3 \times \left(c^3\right)^{-2} = \left(a^{-1}\right)^3 b^3 \left(c^{-2}\right)^3 = \left(a^{-1}bc^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{a}b\frac{1}{c^2}\right)^3 = \left(\frac{b}{ac^2}\right)^3$

مسئله ۳) در این مسئله جمع و تفریق بین اعداد توان دار آمده است و هدف از آن یک محاسبه مستقیم است که با انجام آن دانش آموزان متوجه شوند که در جمع و تفریق اعداد توان دار قاعده خاصی وجود ندارد.

مسئله ۴) در این مسئله چگونگی استفاده از تعریف و انجام چند محاسبه نمادین ساده مورد نظر است تا یکی از قواعد اساسی توان رسانی در حالت خاص توسط دانش آموز ثابت شود. هر کدام از آن مقدارها طبق تعریفشان و خواصی که از قبل می دانیم محاسبه می شوند و مستقیما تساوی آنها دیده می شود.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$(a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$
$$\left(a^n\right)^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

این مسئله با توجه به لزوم ارائه استدلال در قالب نمادها از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. برای توضیح بیشتر جهت تفهیم دانش آموزان می توان از مثال های عددی استفاده کرد.

ارزیابی یادگیری:

برای ارزیابی یادگیری مفهوم توان می توانید از مسائلی که به صورت کلامی بیان شده اند و حل آنها از طریق مفهوم توان رسانی قابل انجام است استفاده کنید. مثلا محاسبه سود بانکی و اضافه شدن سرمایه در طی چند سال متوالی نیازمند مفهوم توان است. برای ارزیابی توانایی محاسباتی و استفاده از خواص اساسی توان رسانی نیز مسائل کتاب مناسب هستند.

محدوده مطالب:

توان رسانی مورد بحث در این کتاب در حد توانهای صحیح است و توانهای کسری در این کتاب مطرح نمی شوند.

ارائه مفهوم توان کسری محتاج عمل ریشه گیری با فرجه دلخواه است که در این کتاب وارد آن نمی شویم. توان اعداد حقیقی نیز محتاج عمل حدگیری و توان کسری است که در سالهای بالاتر می توان به آن پرداخت.

بخش نماد علمی

اهداف بخش :

- آشنایی با نماد علمی اعداد اعشاری
- کسب مهارت نوشتن اعداد اعشاری به شکل نماد علمی

توضیح: هدف این بخش تشخیص لزوم و مزایای استفاده از نمایش علمی اعداد و همچنین نحوهٔ تبدیل نمایش دهدهی به نمایش علمی اعداد می باشد. کاربرد اصلی نمایش علمی در بیان و نمایش مقادیر بزرگ و کوچک است که در علوم دیگر بسیار پیش می آید.

پیش نیازها :

- آشنایی با توانهای صحیح اعداد (به ویژه توان های صحیح عدد ۱۰)

واژه های کلیدی:

نماد علمی – اعداد اعشاری- قسمت صحیح اعداد اعشاری

نگاه کلی به بخش

این بخش با طرح سوالاتی در باره اندازه برخی مقادیر آغاز می شود که جواب آنها اعداد بزرگی هستند. برخی از این اعداد با روش نمایش دهدهی قابل نوشتن نیستند و لزوم ایجاد یک نمایش جدید برای نوشتن اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک توجیه می شود. سپس اهمیت این نمایش جدید, برای تشخیص میزان بزرگی یا کوچکی اعداد نشان داده می شود و از طریق مثالها, روش کارکردن با این نمایش از اعداد آموزش داده می شود.

ورود به مطلب:

برای شروع درس و ایجاد انگیزه, علاوه برپرسش های مطرح شده در کتاب می توان پرسش های زیر را نیز مطرح کرد.

- بزرگترین عددی که از اندازه گیری بدست آمده و می شناسید چه عددی است؟

- نمایش اعداد بزرگ در ماشین حسابها که صفحه نمایش آنها محدود است چگونه انجام می شود؟

- برای مقایسه یا مرتب کردن دو یا چند عدد بزرگ با یکدیگر چگونه عمل می کنید؟

فعالیت آموزشی :

برای آموزش نماد علمی, ابتدا چند پرسش در باره اندازه برخی اعداد مطرح شده است. با مشاهده مشکلات نمایش دهدهی این اعداد, لزوم استفاده از نمایشهای دیگری برای اعداد درک می شود. از مزایای این نمایش، ایجاد درک ملموس از اعداد بزرگ و کوچک و هم چنین مقایسه ساده بین اعداد می باشد. معلم می تواند برای شروع, با ارائه چند عدد بزرگ و نزدیک به هم نظیر اعداد :

14678900 , 1458009 , 14430031,.....

سئوالات زیر را در قالب یک مباحثه مطرح نماید.

-برای مقایسه اعداد فوق با یکدیگر به چه ویژگی هایی از آنها توجه می کنید؟ (تعداد ارقام، بزرگتر بودن ارقام از سمت چپ)

-هرکدام از این اعداد تقریبا چند برابر دیگری است؟ آیا از طریق تعداد ارقام می توان جوابی به این سوال داد؟

سپس با بیان نمایش علمی اعداد اعشاری، سهولت مقایسه این اعداد و پی بردن به میزان بزرگی یا کوچکی آنها را برای دانش آموزان مشخص نمایید.

برای دانش آموزان قوی تر می توان با طرح پرسش های مناسب به ارائه فرمول نمایش علمی عدد b یعنی $b=a\times 10^n$ و $1\le a<10$, $n\in Z$ رسید. توجه کنید که نیازی به بحث نمایش علمی اعداد منفی نیست و برای نمایش علمی اعداد منفی همان قدرمطلق آنها با نمایش علمی نوشته می شود و سپس علامت منفی به ابتدای آن اضافه می شود.

بیان ارتباط بین تغییر محل ممیز و توان ۱۰ در نمایش اعشاری اعداد کمک زیادی برای نمایش اعداد با نماد علمی می کند.

مسائل صفحه ۶۲

مسئله ۱) نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) $26478914=2/6478914\times 10^7$ ب) $0/0004892=4/892\times 10^{-4}$

ج) $12\times 150000=1800000=1/8\times 10^6$ د) $200\times 423+2=84602=8/4602\times 10^4$

ه) $45/2\times 10^4\times 5^6=706250\times 10^4=7/0625\times 10^9$ و) $\frac{32\times 11\times 10^{12}}{44\times 80}=\frac{8\times 10^{12}}{80}=10^{11}=1\times 10^{11}$

ز) $\frac{1}{20000}=\frac{1}{2}\times 10^{-4}=0/5\times 10^{-4}=5\times 10^{-5}$

همانطور که ملاحظه می شود برای حل تمرین های قسمت " و " و " ز " ایجاد تغییرات مناسب با استفاده از خواص اعمال و توانها و سپس نوشتن آنها به صورت نماد علمی، انجام محاسبه را ساده تر می کند.

مسئله ۲) نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید. منظور از نمایش اعشاری همان نمایش دهدهی و نوشتن اعداد از طریق رقمهای آن است.

الف) $1/43\times 10^5=143000$ ب) $2/543\times 10^{-3}=0/002543$ ج) $1/23\times 10^6=1230000$

د) $0/00421\times 10^{-4}=0/000000421$

مسئله ۳) 2549×10^6 = جرم جسم برحسب گرم

$$\frac{2549\times 10^6}{9/1\times 10^{-25}}\approx 280/10989\times 10^{31}=2/8010989\times 10^{33}$$

ارزیابی یادگیری:

برای ارزیابی درک نماد علمی لازم است دانش آموزان توانایی تشخیص آن را داشته باشند که چه شیوه ای از نمایش اعداد به صورت نماد علمی است. مثلا باید تشخیص دهند کدام یک از اعداد زیر با نماد علمی نوشته شده اند؟

الف) $0/4\times10^{2}$ ب) $0/00134$ ج) $4/59133$ د) $4/87569\times10^{-23}$

همچنین دانش آموزان باید بتوانند اعداد داده شده مانند زیر را به صورت نماد علمی بنویسند.

45900000 , $0/001023$, $0/0000567\times10^{-5}$

محدوده مطالب:

با توجه به اینکه اینگونه نمایش ها پیش از این مورد توجه نبوده است بنابراین با استفاده از سئوالات مناسب, اطمینان از اینکه دانش آموزان به درک ملموسی از اعداد بزرگ و کوچک رسیده اند کافی است.

انجام محاسبات پیچیده و زیاد روی اعداد به صورت نماد علمی از اهداف این بخش نمی باشد. حداکثر محاسبه مورد استفاده (در تمرین ها و ارزشیابی) استفاده از ضرب یا تقسیم دو تا چهار عدد توان دار می باشد.

بخش ریشه گیری

اهداف بخش :

- آشنایی با ریشه دوم و سوم اعداد از طریق هندسی
- آشنایی با رابطه بین قدر مطلق و ریشه دوم مجذور یک عدد
- آشنایی با خواص اساسی رادیکالها به شکل نمادین
- کسب توانایی انجام عملیات جبری با رادیکالها به شکل عددی و نمادین

- کسب توانایی گویا کردن مخرج کسرهای شامل یک رادیکال در مخرج و ساده کردن رادیکالها به شکل عددی و نمادین

پیش نیاز ها :

- آشنایی با رابطه بین طول ضلع و محیط و مساحت مربع
- آشنایی با قدر مطلق یک عدد
- آشنایی با رابطه بین طول ضلع و حجم یک مکعب
- آشنایی با خاصیت های اعمال جبری روی اعداد

واژه های کلیدی :

ریشه دوم، ریشه سوم (کعب) ، ساده کردن رادیکال، گویا کردن مخرج کسر، رادیکالهای یکسان

نگاه کلی به بخش :

این بخش با طرح یک مسئله و حل آن شروع می شود. در طی حل این مسئله به رابطه بین یک عدد و ریشه دوم آن به صورت رابطه بین مساحت یک مربع و طول ضلع آن می رسیم. از آنجا که قبلا دانش آموزان با مفهوم ریشه دوم آشنایی دارند و نماد رادیکال را هم می شناسند, این روش حالت یادآوری ریشه دوم را دارد. علاوه بر این با همین روش مفهوم ریشه سوم یک عدد از طریق هندسی, به صورت رابطه بین حجم یک مکعب و طول ضلع آن ارائه گردیده است. تعریف رسمی ریشه دوم و سوم به عنوان عکس عمل توان دوم و سوم بیان شده است.

در متن کتاب به این نکته تذکر داده شده است که نماد $\sqrt{a}$ نشان دهنده جذر مثبت a است و هر دو ریشه a نشان نمی دهد. مثلا نوشتن $\sqrt{9}=\pm 3$ نادرست است. با تذکر این نکته به رابطه بین قدرمطلق یک عدد و جذر مثبت مجذور آن پرداخته می شود و با یک فعالیت تساوی $\sqrt{a^2}=|a|$ توجیه می شود.

قاعده ضرب و تقسیم رادیکالها ابتدا در چند مثال عددی بررسی می شوند و سپس به صورت نمادین به حالت کلی تعمیم داده می شوند و در مثالها و تمرینها تثبیت می شوند. گویا کردن مخرج کسرها که شامل یک رادیکال است در آخر هین قسمت مطرح می شود.

جمع و تفریق اعداد رادیکالی هیچ قاعده خاصی ندارد و با استفاده از خواص کلی جمع و ضرب روی آنها محاسبه انجام می شود. به همین خاطر ابتدا خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع و تفریق در یک فعالیت با اعداد رادیکالی بیان شده است. نتیجه این فعالیت رسیدن به قاعده جمع یا تفریق اعدادی است که به شکل مضرب یک رادیکال خاص می باشند.

ورود به مطلب:

مناسب است این بخش را با طرح مسئله ای شروع کنیم که حل آن نیازمند استفاده از جذرگیری است. مثلا مقوایی مربع شکل می خواهیم بسازیم که مساحت آن ۱۶ واحد باشد چگونه این کار را انجام دهیم؟ با این گونه مسائل خود به خود و به طور طبیعی مفهوم جذر مطرح می شود. در مورد آموزش ریشه سوم نیز از همین طریق می توانید عمل کنید و هدف را ساختن مخزنی مکعب شکل با حجمی معین قرار دهید. پس از آن, تعریف دقیق ریشه دوم سوم و نمادگذاریهای $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{a}$ قابل طرح می باشند.

برای رسیدن به رابطه $\sqrt{a^2}=|a|$ می توانید در چند مثال عددی از دانش آموزان بخواهید مقادیر زیر را حساب کنند. $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{(-1)^2}$, $\sqrt{(-5)^2}$. البته در این محاسبات لازم است دانش آموزان با ترتیب عملیات در توان رسانی و جذر گیری آشنا باشند و ترتیب این عملیات را از طریق پرانتزگذاری تشخیص دهند. سپس در صورت لزوم با ذکر مثالهای بیشتر از آنها بخواهید حدس خود را بیان کنند و پس از آزمایش حدس خود دلیلی بر درستی آن ارائه کنند.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب و یادآوری و آموزش ریشه دوم به بیندیشیم صفحه ۶۳ می رسیم که در آن در مورد وجود

ریشه دوم پرسش شده است. می توانید در این مورد در سر کلاس مباحثه انجام دهید و نظرات ابراز شده را مورد نقد و بررسی قرار دهید و با رسیدن به جواب صحیح برای آن دلیل به دست آورید.

پس از آن به فعالیت صفحه ۶۴ می رسیم که هدف از آن درک ارتباط قدر مطلق و جذر مربع یک عدد و تقویت مهارت تعمیم است.

فعالیت صفحه ۶۴

با توجه به آشنایی دانش آموزان با قدر مطلق یک عدد (در فصل اول) با ملاحظه چند مثال عددی تساوی بین قدر مطلق و جذر مربع اعداد را ملاحظه می کند.

بند(۱): برای توضیح درستی تساوی به روش زیر عمل می شود.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3\\ |-3|=3\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{(-3)^2}=|-3|$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5\\ |5|=5\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{5^2}=|5|$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{4^2}=\sqrt{16}=4\\ |4|=4\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{4^2}=|4|$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4\\ |-4|=4\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{(-4)^2}=|-4|$$

بند(۲): برای تعمیم بهتر مثالهای متنوع ارائه کنید و مقادیری که برای بررسی بیشتر انتخاب می کنید بهتر است اعداد گویای غیر صحیح و حتی غیرگویا باشند.

$$a=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\\ |a|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$a=-0/1\Rightarrow a^2=0/01\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a^2}=\sqrt{(-0/1)^2}=\sqrt{0/01}=0/1\\ |a|=|-0/1|=0/1\end{array}\right.\Rightarrow\ \sqrt{(-0/1)^2}=|0/1|$$

$$a=-\sqrt{5}\Rightarrow a^2=5\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a^2}=\sqrt{5}\\ |a|=|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}\end{array}\right.\Rightarrow\sqrt{(-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$$

تمرین در کلاس صفحه ۶۴

در این تمرین در کلاس دانش آموزان مهارت خود را در استفاده از فرمول $\sqrt{a^2}=|a|$ و کار با قدر مطلق را افزایش می دهند.

$$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$$
$$\sqrt{b^4c^4}=\sqrt{(b^2c^2)^2}=|b^2c^2|=b^2c^2$$
$$\sqrt{a^8}=\sqrt{(a^4)^2}=|a^4|=a^4$$
$$(\sqrt{b})^2=b$$

در اولین تساوی لزومی به توان رساندن عدد (-6) و سپس محاسبه جذر آن نیست. در آخرین تساوی هم دقت کنید که هیچ محاسبه خاصی لازم نیست و طبق تعریف نماد رادیکال, $\sqrt{b}$ عددی است مثبت که توان دوم آن برابر b است و تساوی $(\sqrt{b})^2=b$ طبق تعریف برقرار است.

بیندیشیم صفحه ۶۴

در این مورد نیز بهتر است در کلاس مباحثه انجام شود و با بررسی نظرات ابراز شده نتیجه نهایی به دست آید و برای آن دلیل ارائه شود. با توجه به اینکه توان سوم یک عدد منفی، عددی منفی و توان سوم یک عدد مثبت، عددی مثبت است بنابراین محدودیت ریشه دوم در این جا وجود ندارد. علامت ریشه سوم عدد منفی، منفی و علامت ریشه سوم عدد مثبت، مثبت است. بررسی درستی این مطلب با ارائه چند مثال عددی و تعریف ریشه سوم نظیر مثال زیر می تواند انجام شود.

$$(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27}=-3$$
$$3^3=3\times3\times3=27 \Rightarrow \sqrt[3]{27}=3$$

تمرین در کلاس صفحه ۶۵

در این تمرین درک تعریف ریشه سوم و خواص مهم ریشه سوم که مستقیما از تعریف به دست می آیند مورد ارزیابی قرار می گیرد.

$$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=(-5) \qquad \sqrt[3]{a^3}=a \qquad \sqrt[3]{b^6}=\sqrt[3]{(b^2)^3}=b^2$$

$$\sqrt[3]{x^4x^5}=\sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3 \qquad (\sqrt[3]{b})^3=b$$

در تمام تساویهای بالا نکته اصلی همان تعریف ریشه سوم و نماد $\sqrt[3]{b}$ است که نشان دهنده عددی است که توان سوم آن برابر b است. هر عددی فقط یک ریشه سوم دارد و در تعریف ریشه سوم هیچ محدویتی برای b وجود ندارد و b هر عددی می تواند باشد.

در قسمت بعد به ضرب و تقسیم رادیکالها می رسیم که با یک فعالیت محاسباتی و مشاهداتی, قاعده ضرب دو رادیکال با فرجه ۲ را بررسی می کنیم و به حالت کلی تعمیم می دهیم.

فعالیت صفحه ۶۵ ***بند(۱):***

a	9	25	$\frac{1}{4}$
b	4	4	100
$\sqrt{a}\sqrt{b}$	$\sqrt{9}\times\sqrt{4}=3\times2=6$	$\sqrt{25}\times\sqrt{4}=5\times2=10$	$\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{100}=\frac{1}{2}\times10=5$
$\sqrt{ab}$	$\sqrt{9\times4}=\sqrt{36}=6$	$\sqrt{25\times4}=\sqrt{100}=10$	$\sqrt{\frac{1}{4}\times100}=\sqrt{25}=5$

بند(۲): اعداد هر ستون در سطر سوم و چهارم مساوی است.

بند(۳):

a	$\frac{1}{25}$	$0/01$
b	36	400
$\sqrt{a}\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{1}{25}}\times\sqrt{36}=\frac{1}{5}\times6=\frac{6}{5}$	$\sqrt{0/01}\times\sqrt{400}=0/1\times20=2$
$\sqrt{ab}$	$\sqrt{\frac{1}{25}\times36}=\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{6}{5}$	$\sqrt{0/01\times400}=\sqrt{4}=2$

در یک کلاس قوی تر می توان با راهنمایی معلم اثبات جبری زیر را انجام داد (اما پرسش از این اثبات در امتحان توصیه نمی شود)

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$$

پس $\sqrt{a}\sqrt{b}$ عددی است که توان دوم آن برابر ab است و چون مثبت نیز می باشد بنا به تعریف ریشه دوم گیری داریم $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. درستی این تساوی برای فرجه سوم مستقیما اعلام می شود ولی برای دانش آموزان قویتر با همان روش بالا قابل اثبات است.

تمرین در کلاس صفحه ۶۶

هدف این تمرین در کلاس, استفاده از خاصیت ضرب رادیکالها و سپس استفاده از تعریف نماد رادیکال و به دست آوردن مقدار نهایی است.

$$\sqrt{28}\times\sqrt{7} = \sqrt{28\times 7} = \sqrt{196} = 14$$
$$\sqrt[3]{0/01}\times\sqrt[3]{0/8} = \sqrt[3]{0/01\times 0/8} = \sqrt[3]{0/008} = \sqrt[3]{(0/2)^3} = 0/2$$
$$\sqrt[3]{2b^2}\times\sqrt[3]{4b^4} = \sqrt[3]{2b^2\times 4b^4} = \sqrt[3]{8b^6} = \sqrt[3]{(2b^2)^3} = 2b^2$$
$$\sqrt[3]{abc}\times\sqrt[3]{a^2b^5c^8} = \sqrt[3]{(abc)(a^2b^5c^8)} = \sqrt[3]{a^3b^6c^9} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^3} = ab^2c^3$$

قسمت بعدی درس مربوط به ساده کردن رادیکالها است . برای ساده کردن رادیکالها مناسب است که مانند کتاب با چند مثال روش اصلی ساده کردن رادیکالها ارائه شود. سپس به دانش آموزان توضیح داده شود که در این عملیات, عبارت زیر رادیکال به صورت حاصلضرب دو عبارت نوشته می شود که یکی مربع کامل است و با استفاده از خاصیت ضرب رادیکالها عامل مربع از زیر رادیکال خارج می شود. البته برای ساده کردن می توان در چند مرحله عامل های مربع کامل را خارج نمود ***تا جایی که مربع کامل زیر رادیکال نباشد***. در مورد ریشه سوم هم بطور مشابه عمل می شود و از دانش آموزان بخواهید در مورد مراحل طی شده تا ساده کردن رادیکالها در مثال های صفحه ۶۶ توضیح دهند تا مهارت بیشتری را برای حل تمرین بدست آورند. برای حل تمرین در کلاس بعدی همین مراحل طی می شوند.

تمرین در کلاس صفحه ۶۷

$$2\sqrt{150}=2\sqrt{25\times 6}=2\sqrt{25}\sqrt{6}=2\times 5\sqrt{6}=10\sqrt{6}$$
$$\sqrt{128a^5}=\sqrt{64a^4\times 2a}=\sqrt{\left(8a^2\right)^2\times 2a}=\sqrt{\left(8a^2\right)^2}\sqrt{2a}=8a^2\sqrt{2a}$$
$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\times 2}=\sqrt[3]{3^3\times 2}=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{0/003}=\sqrt[3]{0/001\times 3}=\sqrt[3]{(0/1)^3\times 3}=\sqrt[3]{(0/1)^3}\sqrt[3]{3}=0/1\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt[3]{250a^7b^3}=\sqrt[3]{125a^6b^3\times 2a}=\sqrt[3]{\left(5a^2b\right)^3\times 2a}=\sqrt[3]{\left(5a^2b\right)^3}\sqrt[3]{2a}=5a^2b\sqrt[3]{2a}$$

در کتاب, خاصیت تقسیم رادیکالها بطور مستقیم بیان شده است. ولی در صورت داشتن زمان مناسب می توان با ارائه فعالیتی نظیر حاصلضرب, ویژگی تقسیم رادیکالها را نیز توجیه و اثبات کرد.

پس از آموزش تقسیم رادیکالها برای تمرین مناسب است از دانش آموزان بخواهید (به روش پرسش و پاسخ) در مورد مراحل طی شده در هر مثال توضیح دهند.

برای دانش آموزان قوی تر اثبات زیر را (نظیر ضرب رادیکالها) می توانید ارائه کنید. ابتدا ثابت می کنیم برای عدد مثبت b داریم $\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$. درستی این تساوی معادل با آن است که $\sqrt{\frac{1}{b}}$ معکوس $\sqrt{b}$ است و درستی این مطلب معادل با آن است که ضرب این دو عدد برابر ۱ است. محاسبه زیر نشان می دهد ضرب $\sqrt{\frac{1}{b}}$ در $\sqrt{b}$ برابر ۱ است.

$$\sqrt{\frac{1}{b}}\times\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{b}\times b}=\sqrt{1}=1$$

بنابراین $\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$. حال ثابت می کنیم $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\times\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\,\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

برای ورود به بحث گویا کردن کسرها مناسب است تساوی $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ را با ارائه دلیل ارائه کنید و از طریق هر کدام سعی کنید محل آن را روی محور حدس بزنید و تقریبی از آن ارائه کنید. مطمئنا نمایش $\frac{\sqrt{3}}{3}$ بسیار گویاتر از $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است. سپس نام این عمل را گویا کردن مخرج کسر بگذارید.

از دانش آموزان بخواهید در مورد مراحل طی شده در هر مثال کتاب توضیح دهند و دلایل هر کدام از تساوی ها را بیان کنند. برای انجام عملی گویا کردن , به دانش اموزان توصیه کنید ابتدا رادیکال مخرج کسر را تا حد امکان ساده کنند و سپس گویا کنند.

برای بررسی مهارت دانش اموزان در گویا کردن مخرج کسر، تمرین هایی مانند زیر را برای حل در کلاس ارائه کنید.

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{8ab}}$ ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{54c^2b}}$ د) $\frac{1}{\sqrt[3]{2/7a^2bc^3}}$

در باره جمع و تفریق ادیکالها هیچ قاعده خاصی وجود ندارد و فقط در حد همان خواص کلی اعداد مانند پخشی بودن ضرب نسبت به جمع و فاکتورگیری که همان عکس عمل پخشی است راه دیگری برای جمع و تفریق ردیکالها نداریم. هدف فعالیت صفحه ۶۳ آموزش جمع و تفریق رادیکالهای یکسان با استفاده از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع در اعداد حقیقی است.

فعالیت جمع و تفریق رادیکالها صفحه ۶۸

بند(۱): در این فعالیت دو تساوی با رادیکالهای فرجه ۲ و ۳ عنوان شده است و در تساوی ها از خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استفاده شده است .

بند(۲):

$$5\sqrt{11}=(7-2)\sqrt{11}=7\sqrt{11}-2\sqrt{11}$$
$$5\sqrt[3]{6}=(7-2)\sqrt[3]{6}=7\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}$$

بهتر است مثالهای کتاب مورد بررسی قرار گیرند و شیوه های رسیدن به رادیکالهای یکسان تمرین شود.

معلم می تواند در صورت نیاز مثالهایی برای جمع و تفریق رادیکالها به عنوان" تمرین در کلاس " برای دانش آموزان مطرح تا با حل آن در کلاس دانش آموزان مهارت لازم را بدست آورند . لازم است مثالهایی ارائه شود که پس از ساده شدن بیش ازیک رادیکال بماند, مانند مثال زیر.

$$2\times\left(\sqrt{20}-\sqrt{32}\right)+3\times\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}+4\right)$$

تمرین در کلاس صفحه ۶۹

هدف از این تمرین جلوگیری از یک اشتباه رایج است که برخی دانش آموزان قاعده ضرب و تقسیم رادیکالها را نسبت به جمع و تفریق هم به کار می برند.

بند(۱): $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ و $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ پس $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$.

بند(۲): $\sqrt{100}-\sqrt{36}=10-6=4$ و $\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$ پس $\sqrt{100-36}\neq\sqrt{100}-\sqrt{36}$

مسائل صفحه ۶۹

مسئله ۱) در این مسئله ریشه های دوم خواسته شده است که در زیر ریشه های دوم مثبت ارائه شده است.

الف) $\sqrt{36}=6$ ب) $\sqrt{\frac{1}{49}}=\frac{1}{7}$ ج) $\sqrt{0/04}=0/2$ د) $\sqrt{10^4}=10^2$

ه) $\sqrt{b^4}=b^2$ و) $\sqrt{\frac{1}{a^8}}=\frac{1}{a^4}$ ز) $\sqrt{a^4b^{12}}=a^2b^6$ ح) $\sqrt{9a^2}=3|a|$

مسئله ۲) الف) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ ب) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2})^3}=-\frac{1}{2}$ ج) $\sqrt[3]{0/008}=\sqrt[3]{(0/2)^3}=0/2$

د) $\sqrt[3]{a^3}=a$ ه) $\sqrt[3]{64b^3}=\sqrt[3]{4^3b^3}=\sqrt[3]{(4b)^3}=4b$ و) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}}=\sqrt[3]{(\frac{a^2}{b^3})^3}=\frac{a^2}{b^3}$

مسئله ۳)

$$\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6 \quad , \quad \sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5 \quad , \quad \sqrt{\frac{36}{49}}=\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{6}{7} \quad , \quad \sqrt{0/04}=\sqrt{(0/2)^2}=0/2$$

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3 \quad , \quad \sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2 \quad , \quad \sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4 \quad , \quad \sqrt{4x^2}=\sqrt{(2x)^2}=2|x|$$

$$\sqrt[3]{-0/125}=\sqrt[3]{(-0/5)^3}=-0/5 \quad , \quad \sqrt[3]{a^3b^6}=\sqrt[3]{(ab^2)^3}=ab^2 \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{b^6}{c^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{b^2}{c}\right)^3}=\frac{b^2}{c}$$

مسئله ۴) الف) $\sqrt{300}=\sqrt{100\times 3}=10\sqrt{3}$ ب) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

ج) $\sqrt{18a^3}=\sqrt{9a^2\times 2a}=3|a|\sqrt{2a}$ د) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\times 2}=3\sqrt[3]{2}$

ه) $\sqrt[3]{-16}=\sqrt[3]{(-2)^3 2}=-2\sqrt[3]{2}$ و) $\sqrt[3]{\frac{a^7b^2}{24c^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{2c}\right)^3\frac{ab^2}{3}}=\frac{a^2}{2c}\sqrt[3]{\frac{ab^2}{3}}$ ز) $\sqrt[3]{\frac{343}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^3}=\frac{7}{3}$

مسئله ۵) در این مسئله از خواص ضرب رادیکالها و خواص جابجایی و شرکت پذیری عمل ضرب استفاده می شود. در محاسبات خود چگونگی به کارگیری این ویژگیها را توضیح دهید.

الف) $\sqrt{27}\times\sqrt{3}=\sqrt{27\times 3}=\sqrt{81}=9$ ب) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=(3\times 2)\times\sqrt{2\times 3}=6\sqrt{6}$

ج) $-3\sqrt{5}\times\left(-2\sqrt{20}\right)=((-3)\times(-2))\sqrt{5\times 20}=6\sqrt{100}=6\times 10=60$

د) $\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{3\times 8}{2\times 27}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

ه) $-5\sqrt{6}\times(-2)\sqrt{18}=10\sqrt{108}=10\sqrt{36\times 3}=10\times 6\times\sqrt{3}=60\sqrt{3}$

و) $\sqrt{0/2}\times\sqrt{0/18}=\sqrt{0/036}=\sqrt{0/36\times 0/1}=0/6\sqrt{0/1}$

ز) $2\sqrt[3]{a^4b^3}\times\sqrt[3]{a^2b}=2\sqrt[3]{a^6b^4}=2\sqrt[3]{(a^2b)^3 b}=2a^2b\sqrt[3]{b}$

ح) $2\sqrt[3]{4}\times(-3)\sqrt[3]{2}=-6\sqrt[3]{8}=-6\times 2=-12$ ط) $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{36\times 6}=\sqrt[3]{6^3}=6$

ی) $2\sqrt{a^4b}\times 3\sqrt{a^2b^3}=6\sqrt{a^6b^4}=6\sqrt{(a^3b^2)^2}=6|a|^3\,b^2$

مسئله ۶) الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ د) $\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

ه) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

و) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2^4}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{2^2}=\sqrt[3]{4}$

ز) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

ح) $\sqrt[3]{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{4^2}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{4^2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{44}}{4}$

ط) $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

ی) $\frac{1}{\sqrt{bc}}=\frac{1}{\sqrt{bc}}\times\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{bc}}{bc}$

ک) $\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\times\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{2a}}{2a}$

ل) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$

م) $\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}\times\frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{8x^3}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2}}{2x}$

ن) $\sqrt[3]{\frac{3}{4a}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4a}}\times\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{2a^2}}=\frac{\sqrt[3]{6a^2}}{2a}$

س) $\sqrt[3]{\frac{4a}{3b^3c}}=\frac{\sqrt[3]{4a}}{\sqrt[3]{3b^3c}}\times\frac{\sqrt[3]{9c^2}}{\sqrt[3]{9c^2}}=\frac{\sqrt[3]{36ac^2}}{3bc}$

مسئله ۷)

1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

2) $4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(4-2)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

3) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}=\frac{5}{6}\sqrt{3}$

4) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+2+4)\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

5) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}=\sqrt{2^2\times 2}+\sqrt{4^2\times 2}-\sqrt{3^2\times 2}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

6) $\sqrt[3]{8\times 2}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=(2-1)\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$

7) $4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}=4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^3\times 5}=4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=6\sqrt[3]{5}$

8) $\sqrt[3]{\frac{16}{81}}-\sqrt[3]{\frac{250}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2^3\times 2}{3^3\times 3}}-\sqrt[3]{\frac{5^3\times 2}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-5\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\frac{-13}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

9) $4\sqrt{2^2+3^2}+\sqrt{52}=4\sqrt{13}+\sqrt{4\times 13}=4\sqrt{13}+2\sqrt{13}=6\sqrt{13}$

$10)\ \dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}$

$11)\ \sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{4}$

$12)\ 5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{6}=3\sqrt[3]{6}$

$13)\ a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$

$14)\ 4\sqrt{x}-5\sqrt{x}=(4-5)\sqrt{x}=-\sqrt{x}$

$15)\ \sqrt[3]{8y}-\sqrt[3]{y^4}=\sqrt[3]{2^3y}-\sqrt[3]{y^3y}=2\sqrt[3]{y}-y\sqrt[3]{y}=(2-y)\sqrt[3]{y}$

$16)\ \sqrt{a^2b^4}-\sqrt{a^2c}=|a|b^2-|a|\sqrt{c}$

$17)\ 3\sqrt[3]{y}-2\sqrt[3]{y}=(3-2)\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{y}$

مسئله ۸) این مسئله به نوعی(بطور ضمنی) حل معادله شامل اعداد رادیکالی (با رادیکالهای یکسان) است. توصیه می شود با طی مراحل حل معادله (که در دوم و سوم راهنمایی آمده است) مقدار خواسته شده را پیدا کنند.

$$-2\sqrt{7}-\square=-3\sqrt{7}\Rightarrow -2\sqrt{7}+3\sqrt{7}=\square \Rightarrow (-2+3)\sqrt{7}=\square \Rightarrow \sqrt{7}=\square$$

$$\square-\sqrt{6}=5\sqrt{6}\Rightarrow \square=\sqrt{6}+5\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{20}+\square=7\sqrt{5}\Rightarrow \sqrt{5}+\sqrt{4\times5}+\square=7\sqrt{5}\Rightarrow \sqrt{5}+2\sqrt{5}+\square=7\sqrt{5}$$

$$\square=7\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{2}-\square=2\sqrt[3]{2}\Rightarrow \sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=\square \Rightarrow (1-2)\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{2}=\square$$

$$\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{96}-\square=-3\sqrt[3]{12}\Rightarrow \sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{8\times12}-\square=-\sqrt[3]{12}\Rightarrow \sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{12}=\square$$

$$\Rightarrow 4\sqrt[3]{12}=\square$$

ارزیابی یادگیری:

توانایی دانش آموز در بیان خواص رادیکالها در ضرب و تقسیم و استفاده از این خواص در محاسبات نشان دهنده درک دانش آموز از مفاهیم این بخش است. همچنین دانش آموز باید متوجه این نکته شده باشد که در جمع و تفریق رادیکالها قاعده خاصی غیر از خواص کلی جمع و ضرب اعداد وجود ندارد.

محدوده مطالب

در این قسمت, توانایی در محاسبات پیچیده مطرح نیستند و مسئله اصلی درک مفهوم ریشه گیری و تعریف آن و توانایی بکارگیری این نماد و خواص آن در محاسبات معمولی است. به ویژه در گویا کردن مخرج کسرها فقط حالتی که یک رادیکال در مخرج قرار گرفته است مورد نظر است زیرا اتحادها در فصل بعدی مطرح می شوند.

سوالات نمونه فصل سوم

از آنجا که مسائل این فصل بیشتر جنبه محاسباتی دارد فقط جواب برخی سوالها آمده است.

۱) هر کدام از اعداد زیر را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۳ بنویسید.

الف) $1, 3, 27, 81, 729$ ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{2/43}$

۲- به جای «....» عدد مناسب قرار دهید.

الف) $2^{\cdots} = 64$ ب) $4^{\cdots} = 256$ ج) $\frac{1}{16} = 2^{\cdots}$ د) $5^{\cdots} = \frac{1}{0/04}$ ه) $2^{\cdots} = 0/125$

و) $\frac{1}{7^{\cdots}} = 343$ ز) $(2^3)^4 = 2^{\cdots}$ ح) $(3^3)^4 = 9^{\cdots}$ ط) $((\frac{1}{2})^3)^2 = 4^{\cdots}$ ی) $(2^2)^3 = \frac{1}{8^{\cdots}}$

۳)حاصل عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

الف) $5^3 \times 5^7$ ب) $\left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$ ج) $(-3)^3 \times (-3)^5 \times (-3)^7$ د) $(0/2)^6 \times (0/2)^{12} \times \left(\frac{1}{5}\right)^6$

ه) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 \times (2/5)^4$ و) $3^3 \times 5^3$ ز) $2^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ ح) $(-2)^5 \times 2^4$

ط) $(2^3)^4 \times 4^5$ ی) $a^2 \times a^3$ ک) $3^x \times 3^2 \times 3^{x-2}$ ل) $a^3 \times b^3$

م) $6^3 \div 2^3$ ن) $a^5 \div b^5$ س) $15^7 \div 15^2$ ع) $a^9 \div a^3$

ف) $(x^2)^4 \div x^6$ ظ) $(5^6 \div 5^2) \times 3^4$ ض) $(2^4 \times 3^4) \div 6^2$ غ) $(a^5 \times b^5) \div (ab)^3$

۴- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) 2^4 ۲) 3×2^{-1} ۳) $4 + 5 \times 3^{-2}$ ۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

۵) $2 - 3 \times 4^2 + 2 \times 3^{-1}$ ۶) $(2^3)^2 - 3 \times 5^{-2}$ ۷) $\frac{1}{2} \times 3^{-2} - \frac{4}{5^{-1}} + 5 \times \frac{1}{3^{-2}}$

۵- عدد 4^5 را به صورت های زیر بنویسید.

الف) حاصلضرب دو عدد توان دار مساوی **جواب**: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 2^{5+5} = 2^5 \times 2^5$

ب) حاصلضرب دو عدد توان دار با پایه مساوی که یکی 4 برابر دیگری باشد. **جواب:** $4^5 = 4^{3+2} = 4^3 \times 4^2$

۶- حاصل عبارت های زیر را به صورت توان مثبت بنویسید.

الف) 2^{-4} ب) $\frac{1}{(0/2)^{-3}}$ ج) $\frac{1}{a^{-4}}$ د) $\frac{4^3 \times 2^{-2}}{5^{-3} \times 10^2}$ ه) نصف عدد 2^{-5} و)ثلث عدد $\frac{1}{3^{-4}}$.

۷- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{2^8 \times 9^8}{3 \times 3^7}$ ب) $\frac{4^6 \div 2^5}{5^3 \div 4^2}$

ج) $4 \times \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times ... \times 4^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ د) $(6^2)^3 \div (9^3 \times 8^2)$

جواب ج) ۲

۸- الف) عدد 7^5 را به صورت حاصلضرب سه عدد توان دار بنویسید. مسئله چند جواب دارد؟

ب) به کمک قسمت (الف) و تجزیه مناسب 7^5 عبارت $\frac{7^5 \times 3^3 \times 2}{21^3 \times 14}$ را ساده کنید.

ج) به کمک قسمت (الف) و تجزیه مناسب 7^5 عبارت $\frac{(7^5)^2 \times 2^4 \times 5^2}{35^2 \times 14^4}$ را ساده کنید.

۹- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

الف) نصف عدد 4^3 ب) ثلث عدد 9^4

ج)حاصل ضرب a در $(a^{-2})^3$ د) $\left(\frac{3a}{2}\right)^4 (2a^2)^{-3} \frac{a}{3 \times (2a)^{-4}}$

جواب د) $\left(\frac{3a}{2}\right)^3$

۱۰- اعداد $(0/2)^3, (0/2)^2, (0/25)^2$ را با یکدیگر مقایسه کنید. **جواب:** $(0/2)^3 < (0/2)^2 < (0/25)^2$

۱۱- در یک شرکت تولید دارو هر ۱۰ قرص در یک دراژه، هر ۱۰ دراژه در یک قوطی مکعب مستطیل و هر ۱۰ قوطی در یک بسته و هر ده بسته در یک کارتن بسته بندی و به محل فروش ارسال می گردد.

الف) جدول زیر را با نوشتن اعداد به صورت توان ۱۰ کامل کنید.

تعداد کارتن	۱ ۱۰ ۱۰۰
تعداد بسته	
تعداد قوطی	
تعداد داراژه	
تعداد قرص	

ب)۲۰ کارتن شامل چند دراژه است. **جواب**: ۲۰۰۰۰

ج) اگر 10^5 قرص نیاز داشته باشیم چند کارتن قرص باید تهیه کنیم. **جواب**: ۱۰

۱۲- در مسئله مدلسازی تقسیم سلولی فرض کنید پس از پایان هر دو واحد زمانی، دو تک سلولی از بین می رود تعداد تک سلولی ها را پس از ۷ واحد زمانی محاسبه کنید. **جواب**: کافی است جدول تعداد سلولها در هر مرحله را رسم کنید.

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد سلولها	۲	$2^2-2=2$	۴	$4^2-2=14$	$14^2=196$	$196^2-2=38416$	38416^2

۱۳- یکی از بانک ها در آخر هر سال ۱۵ درصد سود بانکی می دهد. یعنی در صورت داشتن A تومان در حساب بانکی در آخر سال $A\frac{15}{100}$ به حساب بانکی اضافه می شَود. پس از چند سال موجودی حساب بانکی, از دو برابر مقدار اولیه بیشتر می شود.

جواب: در هر سال باید موجودی سال قبل را در عدد ۱+۰/۱۵ ضرب کنیم بنابراین باید توانهای متوالی این عدد را حساب کنیم و اولین جایی که مقدار این توان رسانی از ۲ بزرگتر می شود به دست آوریم. با استفاده از ماشین حساب این عمل را انجام می دهیم و ملاحظه می شود که در توان پنجم اولین جایی است که مقدار توان رسانی از ۲ بیشتر می شود. بنابراین بعد از گذشت پنج سال موجودی از دو برابر بیشتر می شود.

۱۴- الف) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$1)\sqrt[2]{9^3}$ $2)\sqrt[3]{8^2}$ $3)\sqrt[3]{(8a)^4}$ $4)\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3}$

$5)\sqrt[3]{(0/008)^2}$ $6)\sqrt{(a^2b)^3b}$ $7)\left(\sqrt{20}\right)^{-1}=$ $8)\sqrt[3]{\frac{4a^2}{c}}\times\sqrt[3]{2ac^4}$

$9)\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$ $10)\sqrt{2}\left(\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{98}\right)$

ب) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$1)\frac{1}{\sqrt{18}}$ $2)\frac{1}{\sqrt[3]{54}}$ $3)\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ $4)\frac{5b}{\sqrt[3]{ab^2}}$

$5)\frac{ab}{\sqrt[3]{c^2a}}$ $6)\frac{2+5a+3\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$ $7)\frac{\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{2}}$

ج) برای حذف رادیکال, هر کدام از عبارات زیر باید در چه عبارتی ضرب شوند؟(کوچکترین عبارت)

$1)\sqrt{a}$ $2)\sqrt[3]{ab^2}$ $3)\sqrt[3]{250}$

$4)\sqrt{2a^3b}$ $5)\sqrt[3]{\frac{3a^2}{25b}}$

د) عبارت های زیر را ساده کنید.

$1)\sqrt{72}$ $2)\sqrt[3]{1080}$ $3)\sqrt[3]{250a^4b^2}$

$4)\sqrt{2ab\times\frac{6a^3}{c^2}}$ $5)\sqrt[3]{4ab^2\left(6a^2b\right)^2}$

۱۵- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\frac{\sqrt[3]{4}\left(2\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{16}\right)}{\sqrt{2}\left(5\sqrt{18}-2\sqrt{50}\right)}$ ۲) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)+\frac{4}{\sqrt{2}}$

۳) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ٤) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}}}}}$

جواب: ۱) $-\frac{4}{10}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۶- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$1)\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{-1}}{\sqrt{3}}$ $2)\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$ $3)\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$4)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $5)\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{c}{\sqrt{a}}$ $6)\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$7)\frac{1}{\sqrt[3]{4a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2b^2}}$