فصل چهارم

چندجمله ایها و اتحادها

نگاه کلی به فصل چهارم

اهداف کلی

۱) آشنایی با جمع و تفریق ، ضرب و تقسیم به عنوان اعمال متقابل

۲) آشنایی با تعبیر هندسی اعمال جمع و تفریق با استفاده از طول پاره خط ها

۳) آشنایی با خواص اساسی قرینه و معکوس اعداد به طور نمادین

۴) آشنایی با محاسبات جبری نمادین اولیه مانند جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و خواص اساسی آنها

۵) درک محاسبات نمادین به عنوان محاسبه روی اعداد دلخواه

۶) آشنایی با محاسبات ساده جبری.

۷) درک عبارتهای جبری به عنوان محاسبات جبری نمادین روی چند عدد دلخواه

۸) آشنایی با متغیر به عنوان نمادی که نشان دهنده یک عدد دلخواه است.

۹) آشنایی با مقدار دهی به متغیر و محاسبه مقدار عبارت جبری

۱۰) آشنایی با یک جمله ای ها و ضریب عددی و درجه و اعمال جمع و تفریق و ضرب آنها

۱۱) آشنایی با چند جمله ای ها و جمع و ضرب آنها

۱۲) آشنایی با مفاهیم اتحاد و تجزیه و اتحادهای زیر

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

۱- خواص اساسی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و اعمال قرینه گیری و معکوس گیری را در محاسبات جبری به کار برند.

۲- نمونه هایی از عبارت های جبری را در محیط هندسی ارائه کنند.

۳- برخی مسائل واقعی و کلامی را از طریق عبارت های جبری مدلسازی کنند.

۴- مقدار یک عبارت جبری را به ازای مقادیر عددی متغیر هایش به دست آورند.

۵- ضریب عددی و درجه یک جمله ای ها را نسبت به متغیر هایش مشخص کنند.

۶- جمه و تفریق و ضرب چند جمله ای ها را انجام دهند.

۷- اتحادها را بشناسند و در محاسبات عددی و نمادین از آنها استفاده کنند.

۸- از اتحادها در تجزیه عبارت های جبری ساده استفاده کنند.

۹- برای اتحادهای ساده نمایش هندسی ارائه کنند.

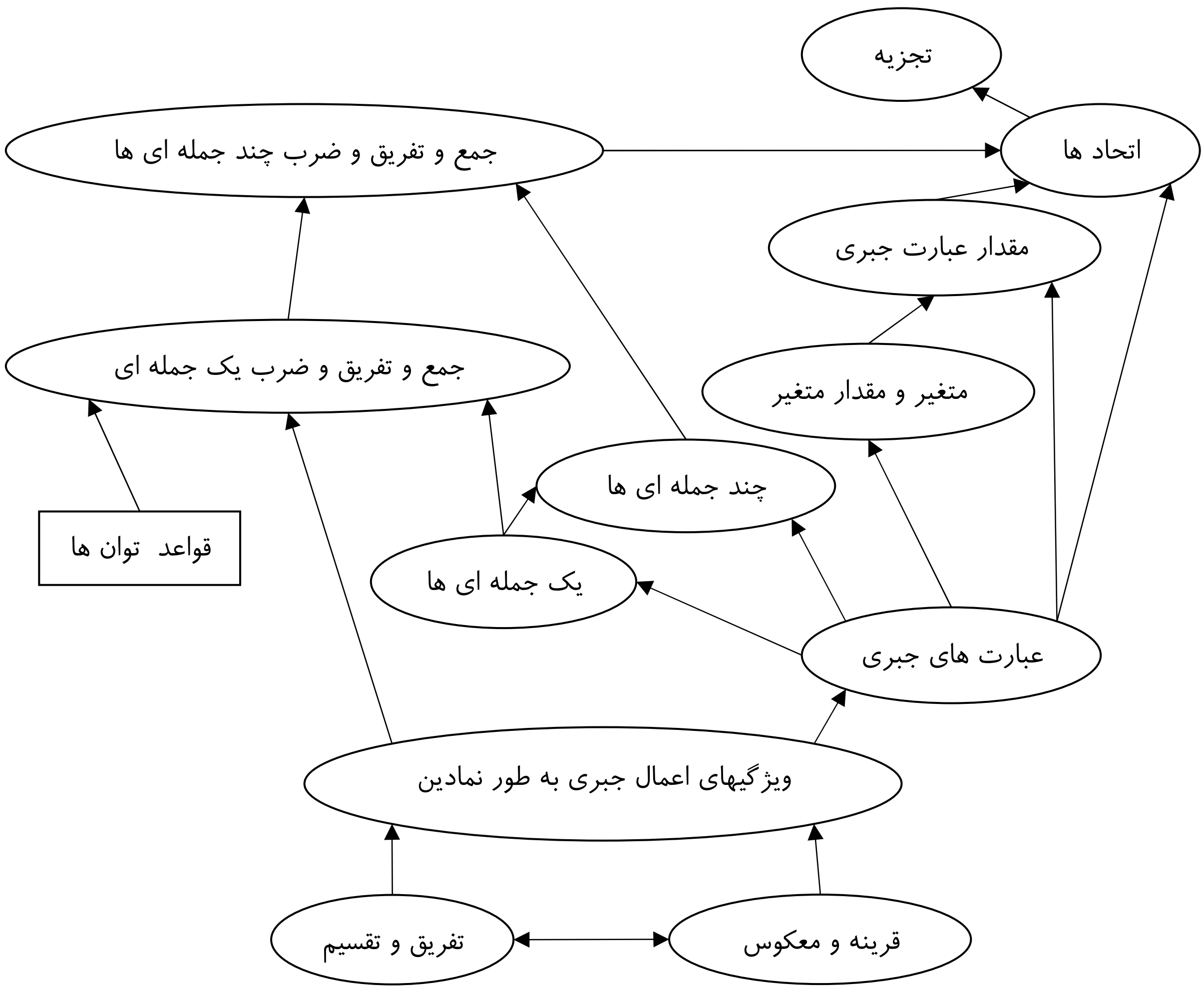
پیش نیازها:

- آشنایی با نمادهای حرفی به عنوان نشان دهنده اعداد دلخواه
- آشنایی با قواعد اعمال جبری روی اعداد توان دار
- آشنایی با اعمال جبری روی اعداد و خواص این اعمال

زمانبندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می شود این فصل در۳ هفته تدریس شود.

طرح کلی فصل چهارم



روش آموزشی فصل چهارم:

این فصل با معرفی اعمال قرینه گیری و معکوس گیری و رابطه آنها با تفریق و تقسیم شروع می شود. ابتدا تفریق به عنوان عمل متقابل جمع، معرفی و عمل قرینه گیری مستقلا ارائه می گردد و سپس رابطه بین قرینه گیری و عمل تفریق به طور نمادین ارائه می شود. همچنین تقسیم به عنوان عمل متقابل ضرب معرفی و عمل معکوس گیری مستقلا بیان می شود و سپس رابطه بین تقسیم و معکوس اعداد ارائه شده است .

در این فصل به کسرها به عنوان یک عمل تقسیم نگاه شده است و هر کسری نشان دهنده یک عمل تقسیم است. کسرها لزوما نشان دهنده اعداد گویا نیستند مثلا کسر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ عدد گویایی نیست و کسرهایی که به صورت نمادین نوشته می شوند نیز لزوما بیان کننده اعداد گویا نیستند.

ویژگیهای اساسی اعمال جمع و ضرب به طور نمادین در فصل اول بیان شده اند و در این بخش ویژگیهای اساسی تفریق و تقسیم به طور نمادین بیان می شوند زیرا این ویژگیها اساس محاسبات جبری نمادین هستند. این دو بخش از طریق توضیح مستقیم و تمرین در کلاس آموزش داده شده اند.

در بخش بعدی از طریق یک فعالیت عبارت های جبری معرفی می شوند. در این فعالیت دانش آموزان باید عبارت های جبری را به عنوان محاسباتی روی چند عدد دلخواه که با نمادهای حرفی بیان شده اند, بشناسند. برای درک بهتر این مفهوم از مثالهای متنوع در زمینه های هندسی استفاده شده است.

در این بخش, یک جمله ایها به عنوان عبارت های جبری خاص و ساده ارائه شده اند و جمع و تفریق و ضرب آنها از طریق فعالیتهایی به کمک خاصیت پخشی ضرب اعداد نسبت به جمع اعداد و ضرب اعداد توان دار بیان شده است.

چندجمله ایها و اعمال روی آنها از طریق یک جمله ای ها بیان شده اند و از طریق توضیح مستقیم و تمرین آموزش داده شده اند.

در آخرین بخش این فصل اتحادهای مهم و تجزیه عبارت های جبری ساده با استفاده از اتحادها ارائه شده اند. مفهوم اتحاد از طریق یک فعالیت ارائه شده است که نتیجه آن درک اتحاد به عنوان بیان تساوی, بین دو عبارت جبری است. دو عبارت جبری مساوی عبارت هایی هستند که به ازای مقدارهای یکسان برای متغیرهایشان, مقدارهای مساوی داشته باشند. البته در این فصل این تعریف اتحاد و تساوی عبارتهای جبری مشکلی در بر ندارد زیرا در این فصل فقط عبارتهای چندجمله ای مطرح می شوند و به ازای هر مقداری برای متغیرها, این عبارت های جبری تعریف شده اند. ولی در حالت عبارت های جبری پیچیده تر مانند $\frac{(x-1)^2}{x-1}$ و $\frac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$ که به ازای برخی مقادیر از متغیرهایشان تعریف نشده اند, اشکالاتی ممکن است پیش آید که در جای خود توضیح خواهیم داد.

همزمان با محاسبات جبری, ارائه تعبیر هندسی از اتحادها و تساوی بین عبارت های جبری و بیان تجزیه مربوط به یک اتحاد بلافاصله پس از معرفی اتحاد از نکات مهم این بخش است.

آموزش بخشهای فصل چهارم

بخش ۴-۱- تفریق و قرینه اعداد

اهداف بخش:

- یاد آوری ارتباط عمل تفریق و جمع و بیان نمادین این ارتباط
- تعبیر هندسی تفریق به عنوان عکس عمل جمع با استفاده از طول پاره خط ها
- معرفی مفهوم قرینه یک عدد از طریق هندسی و بیان نمادین آن
- بیان نمادین رابطه قرینه اعداد و تفریق اعداد

پیشنیازها:

آشنایی با نمادهای حرفی به عنوان نشان دهنده اعداد دلخواه و جمع اعداد

واژه های کلیدی :

قرینه اعداد و جمع و تفریق اعداد

نگاه کلی به بخش:

در این بخش ارتباط بین عمل جمع و تفریق با یک مثال عددی یاد آوری و سپس به صورت نمادین بیان می شود. مفهوم قرینه یک عدد نیز که در فصل اول برای اعداد خاص بیان شده است در این بخش به صورت نمادین معرفی شده است. سپس ارتباط بین عمل تفریق اعداد و قرینه اعداد به طور نمادین ارائه می شود.

چگونگی ورود به مطلب:

این بخش در ارتباط با بیان نمادین عمل تفریق و قرینه گیری است. مسئله اصلی بیان نمادین خواص کلی اعمال تفریق و قرینه گیری است. بنابراین مناسب است با یادآوری این خواص در اعداد خاص, سوالاتی را در مورد کلیت داشتن این خواص مطرح کنید و از دانش آموزان بخواهید که این خواص را در حالت کلی با زبان طبیعی بیان کنند و سپس با زبان نمادین بنویسند.

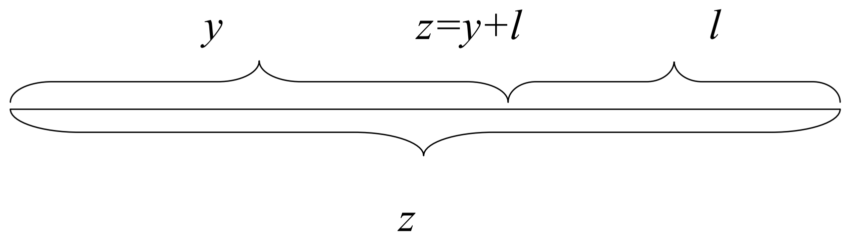
فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب و توضیحات مناسب به تمرین در کلاس در صفحه ۷۴ می رسیم که هدف از آن تشخیص درک مفهوم تفریق و یافتن تعبیر هندسی از بیان نمادین تفریق است. جواب این تمرین به شکل زیر است.

بند (1) $x = z - y, y = z - x$

بند (۲): از آنجا که جمع طول پاره خط باقیمانده با y برابر z است بنا به تعریف تفریق, طول این پاره خط برابر $z-y$ است.

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{}}^{y}\;\overset{z=y+l}{}\;\overbrace{\qquad\qquad}^{l}$$



هدف تمرین در کلاس بعدی, تعیین علامت عددی است که با یک نماد حرفی نشان داده شده است و مکان آن روی محور مشخص شده است. دانش آموز ان باید متوجه علامت اعدادی که با یک نماد نشان داده شده اند, باشند و علامت ظاهری نماد آنها را به اشتباه نیاندازد.

بند (۱): علامت a مثبت $(0<a)$ و علامت b منفی $(b<0)$ است.

بند (۲): قرینه (a-) از روی شکل, عددی است با همان فاصله از مبدأ و در سمت راست مبدا قرار دارد. این نقطه همان نقطه a است.

بند (۳): علامت منفی دارد

بند (۴): ۳=b- و علامت b- مثبت است، قرینه یک عدد منفی عددی با علامت مثبت است.

در تمرین در کلاس صفحه ۷۵ , دانستن خواص پایه ای جمع و تفریق و قرینه گیری مورد نظر است

قسمت الف) به عنوان مثال تساوی $-(a-4)=-a+4$ به ازای مقادیر ۰ و ۱ و ۱- برای a به شکل زیر بررسی می شود.

$$a=0 \quad , \quad \begin{array}{l} -(0-4)=-(-4)=4 \\ -0+4=4 \end{array} \; , \; -(0-4)=-0+4$$

$$a=1 \quad , \quad \begin{array}{l} -(1-4)=-(-3)=3 \\ -1+4=3 \end{array} \; , \; -(1-4)=-1+4$$

$$a=-1 \; , \; \begin{array}{l} -(-1-4)=-(-5)=5 \\ -(-1)+4=1+4=5 \end{array} \; , \; -(-1-4)=-(-1)+4$$

برای بقیه قسمت ها هم کافی است چند مثال با اعداد مثبت ،منفی وصفر ارائه شود.

قسمت ب)

۱) قرینه مجموع دو عدد برابر است با مجموع قرینه های آن دو عدد.

۲) قرینه حاصلضرب دو عدد برابر است با ضرب یکی در قرینه دیگری.

۳) حاصلضرب قرینه دو عدد برابر است با حاصلضرب آن دو عدد.

۴) مربع یک عدد با مربع قرینه آن عدد, مساوی است.

قسمت ج) در عبارت $(-a)^2$ عدد $-a$ به توان ۲ می رسد که برابر همان a^2, اما در عبارت $-a^2$ توان دوم a حساب می شود و سپس حاصل آن قرینه می شود. مقدار عبارت اول همـواره نـامنفی و مقدار عبارت دوم همواره نامثبت است.

ارزیابی یادگیری:

دانش آموزان در پایان این بخش باید بتوانند محاسبات ساده جمع و تفریقی و قرینه گیری را در حالتهای عددی و نمادین انجام دهند و چگونگی محاسبات خود را توضیح دهند. بنابراین با طرح محاسباتی که در آنها کلیه حالتهای مربوط به جمع و تفریق و قرینه گیری آمده است و توضیح خواستن از دانش آمـوزان برای دلیل روشهای محاسبات خود, می تواند میزان یادگیری آنها را نشان دهد.

محدوده مطالب

در این بخش محاسبات جبری پیچیده و چندمرحله ای مورد نظر نیستند. هدف اصلی این بخش آموزش خواص اساسی اعمال تفریق و قرینه گیری و ارتباط بین آنها به طور نمادین و در حالتهای کلی اسـت. در این بخش لازم است روی این خواص, در حالتهای اعداد خاص و سپس تعمیم آن به اعداد دلخواه که از

طریق نمادها نشان داده می شوند پرداخته شود.

سطح بالاتر:

خواص اساسی تفریق و قرینه گیری و رابطه بین آنها در کتاب از طریق مثالهای عددی توجیه شده اند. در صورتی که دانش آموزان توانایی بالاتری دارند معلمان می توانند از طریق تعریف عمل تفریق و قرینه گیری, ارتباط این دو مفهوم و خواص اساسی آنها را با استدلال به دست آورند و در هر مورد استدلال مناسب ارائه کنند.

بخش ۴-۲- تقسیم و معکوس اعداد

اهداف بخش:

۱- یاد آوری ارتباط عمل ضرب و تقسیم و بیان نمادین آن

۲ - یاد آوری مفهوم معکوس یک عدد و بیان نمادین آن

۳- آشنایی با کسر به عنوان تقسیم دو عدد حقیقی دلخواه بر هم

۴ – آشنایی با اعمال جبری اساسی بین کسرها به طور نمادین

۵- یادآوری تساوی اعداد گویا و آشنایی با تساوی کسرها در حالت کلی

پیش نیاز ها:

آشنایی با نمادهای حرفی به عنوان نشان دهنده اعداد دلخواه و جمع و ضرب اعداد

واژه های کلیدی:

:معکوس یک عدد – کسر – ضرب و تقسیم

آموزش فصل چهارم

نگاه کلی به بخش:

در این بخش تعریف عمل تقسیم به صورت عمل متقابل ضرب یاداوری می شود و از علامت کسر به عنوان علامتی برای نمایش تقسیم اعداد بر هم استفاده می شود. سپس معکوس یک عدد یادآوری می شود و از طریق تقسیم ۱ بر آن عدد نمایش داده می شود. توجه داشته باشید که کسرهای تعریف شده در این بخش و بقیه کتاب لزوما عدد گویا نیستند و مقصود از کسر فقط تقسیم دو عدد حقیقی دلخواه بر هم است و ممکن است حاصل تقسیم عدد گویا نباشد.

پس از معرفی کسرها, اعمال جبری بین آنها به صورت تمرین در کلاس مطرح می شوند بدون آن که بخواهیم درستی روابط داده شده را اثبات کنیم. ولی می خواهیم دانش آموزان با توضیح این روابط چگونگی این روابط را درک کرده باشند. اعمال جبری روی کسرها کاملا مشابه همین اعمال روی اعداد گویا هستند و با مشابهت با اعداد گویا می توان درستی این روابط را توجیه کرد ولی باید توجه داشته باشید که این کسرها نشان دهنده اعداد گویا نیستند و هر عددی ممکن است باشند.

ورود به مطلب:

این بخش در ارتباط با بیان نمادین عمل تقسیم و معکوس گیری و معرفی کسرهایی است که از تقسیم دو عدد حقیقی دلخواه به دست آمده اند. مسئله اصلی درک کسرها به ویژه اعداد گویا به عنوان تقسیم دو عدد بر هم و بیان نمادین خواص کلی کسرها در اعمال جبری بین آنها است. بنابراین مناسب است با یادآوری این خواص در چند عدد گویای مشخص, سوالاتی را در مورد کلیت داشتن این خواص مطرح کنید و از دانش آموزان بخواهید که این خواص را در حالت کلی با زبان طبیعی بیان کنند و سپس با زبان نمادین بنویسند.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به مطلب و توضیحات مربوط به درس, به تمرین در کلاس صفحه ۷۶ می رسیم که هدف

از آن, اطمینان از درک معنی اعمال جبری روی کسرها و افزایش مهارت در استفاده از این اعمال است.

قسمت الف)

۱) هر کسری برابر است با حاصلضرب صورت آن کسر در معکوس مخرج آن

۲) برای به دست آوردن حاصلضرب یک عدد در یک کسر می توان آن عدد را در صورت آن کسر ضرب کرد.

۳) اگر صورت و مخرج کسری را در عدد یکسان مخالف صفری ضرب کنیم مقدار کسر تغییر نمی کند.

۴) حاصلضرب دو کسر ،برابر کسری است که صورت آن حاصلضرب صورتها و مخرج آن حاصلضرب مخرجها است.

۵) برای به دست آوردن قرینه یک کسر کافی است که فقط صورت آن را قرینه کنیم یا کافی است که فقط مخرج آن را قرینه کنیم.

۶) در این قسمت سه جمله وجود دارد که هر یک را باید جداگانه توضیح دهیم.

جمله اول $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$: از آنجا که دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{ad}{bd}$ مساویند(طبق قسمت ۳) و همچنین دو کسر $\frac{c}{d}$ و $\frac{bc}{bd}$ مساویند (به همان دلیل) پس مجموع آنها نیز مساوی است.

جمله دوم $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$: مجموع دو کسر که مخرج مساوی دارند برابر کسری است که صورت آن مجموع صورتهای آن دو کسر است و مخرج آن برابر همان مخرج یکسان آن کسرها است.

جمله سوم $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$: مجموع دو کسر برابر کسری است که صورت آن از جمع حاصلضرب صورت هر کسر در مخرج دیگری تشکیل شده است و مخرج آن حاصلضرب مخرجهای آن دو کسر است.

نکته مهم: جواب مسئله بالا یکتا نیست و دانش آموزان ممکن است با جملات متفاوتی توضیحات خود را بیان کنند. فقط باید مطمئن شد که دانش آموزان فرمولهای بالا را درست درک می کنند.

قسمت ب)

$$1)\ 2+\frac{1}{a}=\frac{2}{1}+\frac{1}{a}=\frac{2a+1}{a} \qquad 2)\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$$

$$3)\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab} \qquad 4)\ 2-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{1}+\frac{-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+(-1)\times 1}{1\times(x-1)}=\frac{2x-3}{x-1}$$

در ادامه درس تساوی کسرها مورد توجه قرار گرفته است. با توجه به آن که دانش آموزان قبلا تساوی اعداد گویا و شیوه بررسی آن را می دانند با یادآوری آن شیوه بررسی تساوی کسرهای دلخواه نیز با همان روش طرفین-وسطین بدون ارائه هیچگونه استدلالی بیان شده است.

پس از آن به مسائل آخر این بخش می رسیم. در این مسائل اثبات های ساده محاسباتی که متکی بر خواص اساسی و قوانین اعمال حسابی است مورد نظر بوده است. هدف از این محاسبات آشنایی دانش آموزان با استدلال های ساده و ارائه اثبات های محاسباتی برای برخی اعمال است که قبلا مورد استفاده قرار می داده اند. در حل این مسائل از مطالب تمرین در کلاس و مطالب ارائه شده در درس استفاده می شود.

<u>مسائل صفحه ۷۷:</u>

۱) $c\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=c\times\frac{a}{c}+c\times\frac{b}{c}=a+b$

در عبارت میانی, از این نکته استفاده می شود که بنا به تعریف تقسیم, $\frac{a}{c}$ عددی است که اگر در c ضرب شود برابر a می شود. همچنین $\frac{b}{c}$ عددی است که اگر در c ضرب شود برابر b می شود.

تساوی به دست آمده نشان می دهد که $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ عددی که وقتی در c ضرب شده است برابر $a+b$ شده است, پس $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ همان $\frac{a+b}{c}$ است.

۲) برای بررسی آن که تشخیص دهیم دو عدد معکوس هم هستند کافی است آنها را در هم ضرب کنیم. اگر حاصلضرب برابر ۱ شد آن دو عدد معکوس یکدیگرند.

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$$

۳) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

۴) $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad+b\times(-c)}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ارزیابی یادگیری:

ضروری است دانش آموزان بتوانند معنای محاسبات نمادین روی کسرها را درک کنند و روابط اصلی بین اعمال جمع و تفریق و قرینه گیری و ضرب و تقسیم و معکوس گیری را بشناسند و در محاسبات ساده اولیه به کار برند. بنابراین در خواست توضیح از دانش آموزان برای محاسبات انجام شده و فراهم آوردن موقعیتهای گوناگون محاسباتی که در آنها عملیات جبری گوناگون وجود دارد می تواند نشان دهنده میزان یادگیری دانش آموزان باشد.

محدوده مطالب:

هدف اصلی فقط درک معنا و شناختن روابط اساسی بین اعمال جبری است که به طور نمادین بیان شده باشند. محاسبات جبری پیچیده مورد نظر نمی باشند.

نکات مهم:

مفهوم کسر طرح شده در این بخش کلی تر از مفهوم اعداد گویا است. در این بخش (و بقیه کتاب) منظور از یک کسر عددی است که از تقسیم دو عدد دیگر به دست آمده است. در حالتی که اعداد

تقسیم شده بر هم عدد صحیح باشند حاصل کسر یک عدد گویا است اما در حالت های دیگر ممکن است حاصل کسر عدد گویا نباشد. مثلا کسر $\frac{\sqrt{2}}{5}$ عدد گویایی نیست. بنابراین ذکر مطالب این بخش در مورد کسرها ضروری است و تکرار خواص اعداد گویا نیست. البته خواص جبری کسرها کاملا مشابه خواص جبری اعداد گویا هستند زیرا استدلال درستی آن خواص برای اعداد گویا دقیقا به همان شکل برای کسرهای دلخواه هم قابل تکرار است.

سطح بالاتر:

مقدار زیادی از مطالب ارائه شده در درس و تمرین در کلاسها بدون اثبات هستند. اگر دانش آموزان توانایی بالاتری در درک مطالب و ارائه استدلال دارند معلمین می توانند برای این گونه مطالب (مثلا تساوی کسرها که با طرفین-وسطین بیان شده است) اثبات ارائه نمایند. البته آزمون نهایی در سطح کتاب خواهد بود.

بخش ۴-۳- عبارت های جبری

اهداف بخش:

- آشنایی با متغیر ها به عنوان نمادهایی که نشان دهنده اعداد دلخواه هستند.
- آشنایی با عبارت های جبری به عنوان محاسبات جبری روی متغیرها
- ارائه تعبیر هندسی برای برخی عبارت های جبری و استفاده از عبارت های جبری برای بیان ویژگی های اندازه ای در اشکال هندسی
- آشنایی با مقدار یک عبارت جبری به ازای مقادیر عددی خاص برای متغیرهای آن
- آشنایی با یک جمله ایها و چند جمله ایها به عنوان یک عبارت جبری خاص

- آشنایی با اعمال جمع ، و تفریق و ضرب یک جمله ایها و چند جمله ایها
- آشنایی با درجه چندجمله ایها نسبت به یک متغیر
- آشنایی با درجه چندجمله ایهای یک متغیره و نمایش استاندارد آنها

پیشنیازها:

- آشنایی با محاسبات نمادین و خواص اولیه اعمال جبری
- توانایی محاسبات با اعداد توان دار
- آشنایی با مساحت و محیط اشکال هندسی ساده

واژه های کلیدی

متغیر ،یک جمله ای، ضریب عددی یک جمله ایها, یک جمله ایهای متشابه، چندجمله ای، نمایش استاندارد چندجمله ایها

نگاه کلی به بخش:

در این بخش ابتدا از طریق یک فعالیت در بستر هندسی عبارت های جبری و متغیر ها به عنوان نمادهای نشان دهنده اعداد دلخواه معرفی شده اند. در این روش عبارت های جبری به عنوان اعمالی جبری روی متغیر ها دیده می شوند. برای تثبیت این نکته, مقدار عبارت های جبری به ازای مقدارهایی که برای متغیرشان در نظر گرفته می شود, طرح می شوند و در چند مثال توضیح داده می شوند. سپس بحث, روی ساده ترین عبارت های جبری که یک جمله ایها و بعد از آن چندجمله ایها هستند متمرکز می شود. پس از معرفی چند اصطلاح اصلی مانند ضریب عددی و درجه یک جمله ایها, اعمال جمع و تفریق یک جمله ایها از طریق خاصیت پخشی ضرب اعداد نسبت به جمع اعداد در طی یک فعالیت توضیح داده می شود. شرایط جمع و تفریق یک جمله ایها متشابه بودن آنها است که در طی

همین فعالیت مشخص می شود. ضرب یک جمله ایها نیز در طی یک فعالیت آموزش داده می شود که وابسته به توانایی دانش آموز در ضرب اعداد توان دار است.

در قسمت بعد مفهوم چندجمله ایها از طریق جمع یک جمله ایها ارائه می شود و با استفاده از خاصیت های اصلی اعمال (ضرب و جمع و تفریق) اعداد حقیقی و عملیات جمع و تفریق و ضرب یک جمله ایها, اعمال جمع و تفریق و ضرب چند جمله ایها در چند مثال توضیح داده شده است.

ورود به مطلب :

عبارت های جبری همانند فرمولهای محاسباتی هستند که از طریق آنها می توان مقدار کمیتی را از طریق مقدار کمیت دیگری محاسبه کرد. این فرمولها در جاهایی دیده می شوند که کمیتی وابسته به چند کمیت دیگر است و مقدار آن, از طریق مقدار کمیتهایی که به آن وابسته است محاسبه می شود. در اینجا عملا با مفهوم تابع سر و کار داریم ولی به طور صریح آن را معرفی نمی کنیم. بنابراین مناسب است در مثالهای ساده مانند محاسبه محیط ،مساحت ،حجم و ....یک شکل هندسی که وابسته به طول اضلاع و مانند آنها است, فرمولهای آنها را به دست آوریم و آنها را تحت عنوان عبارت جبری برای دانش آموزان مطرح کنیم. چنین موقعیتهایی که برای دانش آموزان قابل درک باشد و بتوانند فرمولهای مربوطه را به دست آورند برای شروع آموزش عبارت های جبری مناسب هستند. فعالیت صفحه ۷۸ کتاب از روابط جبری که در هندسه قابل طرح هستند استفاده کرده است.

یک جمله ای ها و چندجمله ایها را می توان تحت عنوان عبارت های جبری ساده معرفی کرد که در یک جمله ایها فقط از عمل ضرب استفاده شده است و در چندجمله ایها فقط از اعمال جمع و ضرب و تفریق استفاده شده است.

برای طرح عملیات جبری بین یک جمله ایها و چندجمله ایها باید این نکته را برای دانش آموزان روشن سازید که عبارت های جبری در واقع نشان دهنده اعداد هستند و بنابراین می توان عملیات جبری که

روی اعداد انجام می شود روی عبارت های جبری نیز انجام دهیم.

فعالیت آموزشی :

این بخش با فعالیت زیر شروع می شود که هدف از آن استخراج فرمولهایی است که نمونه هایی از عبارت های جبری هستند. از طریق این مثالها, مفهوم عبارت جبری به عنوان عملیاتی جبری روی چند مقدار دلخواه که با نمادهایی حرفی نشان داده شده اند معرفی خواهد شد.

فعالیت صفحه ۷۸:

بند(۱): مساحت= xy , محیط= $2(x+y)$

بند(۲): طول قطر= $\sqrt{x^2+y^2}$

بند(۳): محیط مثلث= $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$, مساحت مثلث = $\frac{xy}{2}$

پس از انجام این فعالیت می توانید با رسم اشکالی نظیر مثال صفحه ۷۸ و ارائه ابعاد آن به صورت متغیر، رابطه جبری مربوط به یکی از ویژگی های آ نها را بخواهید, یا می توانید با ارائه یک عبارت جبری مناسب، از دانش آموزان بخواهید یک تعبیر هندسی از آن ارائه کنند (نظیر مثال صفحه ۷۹). در ادامه مفهوم مقدار عبارت های جبری به ازای مقادیر خاص متغیرهایشان مطرح می شود که از طریق مثالهای هندسی به خوبی می توان این مفهوم را آموزش داد.

در ادامه تمرکز بر نوع خاصی از عبارت های جبری یعنی یک جمله ایها می باشد. مفهوم یک جمله ایها مستقیما ارائه شده است و در چند مثال توضیح داده شده است.

تمرین در کلاس صفحه ۸۰:

سؤال ۱ : عبارت های زیر یک جمله ای اند.

یک جمله ای	ضریب عددی	درجه نسبت به x
$4x^2y$	۴	۲
$2\sqrt{2}xy$	$2\sqrt{2}$	۱
$\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰

سؤال ۲):

عبارت جبری	آیا یک جمله ای است؟	متغیر ها	در جه نسبت به x	ضریب عددی
$\sqrt{3}x^2yz^3$	بله	x, y, z	۲	$\sqrt{3}$
$4xy^3$	بله	x, y	۱	۴
$-a^2x$	بله	a, x	۱	-۱
$4\frac{xy}{a}$	خیر	x, y, a	---	---
$\frac{4}{7}xa^2b$	بله	x, a, b	۱	$\frac{4}{7}$
$6y\sqrt{x}$	خیر	x, y	---	---

برای بیان جمع و تفریق یک جمله ایها ابتدا ، یک جمله ایهای متشابه از طریق یک فعالیت معرفی شده اند و سپس به کمک ویژگی های عمل ضرب و جمع و تفریق اعداد, جمع و تفریق یک جمله ایها توضیح داده شده اند .

فعالیت صفحه ۸۰:

بند(۱): خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع

بند(۲): در ضرایب عددی آنها

بند(۳):

$$9ma^2x = (7+2)ma^2x = 7ma^2x + 2ma^2x$$
$$4axy^2 = (9-5)axy^2 = 9axy^2 - 5axy^2$$
$$12ab^2x = (8+3+1)ab^2x = 8ab^2x + 3ab^2x + ab^2x$$

بند(۴): این یک جمله ایها متغیرهای یکسان و توانهای متناظر یکسان دارند ولی ضرایب عددی آنها متفاوت است.

فعالیت صفحه ۸۱:

بند(۱): خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع که اگر از طرف عکس به آن نگاه کنیم فاکتور گیری هم گفته می شود. (در فصل اول یادآوری و تذکر داده شده است.)

بند(۲): بله متشابهند.

بند(۳): اگر یک جمله ایهای متشابه سمت چپ با هم جمع شده باشند ضرایب آنها در سمت راست با هم جمع شده است و اگر یک جمله ایهای متشابه سمت چپ از هم کم شده باشند ضرایب آنها در سمت راست از هم کم شده است.

بند(۴):

$$5x + 2x = (5+2)x = 7x$$
$$9ab - 3ba = (9-3)ab = 6ab$$
$$3xy^2 - 4xy^2 = (3-4)xy^2 = -xy^2$$
$$\frac{1}{5}y^2 - \frac{2}{7}y^2 = (\frac{1}{5} - \frac{2}{7})y^2 = -\frac{3}{35}y^2$$
$$4xyz + 2yxz - yzx = (4+2-1)xyz = 5xyz$$

بند(۵): خیر، زیرا یک جمله ایهای $2a$ و $3ab$ متشابه نیستند.

پس از انجام این فعالیت قواعد کلی جمع و تفریق یک جمله ای های متشابه ارائه شده است که لازم است این نتیجه گیری در کلاس عنوان شود. در قسمت بعد توجه دانش آموزان به یک اشتباه رایج جلب می شود.

چگونگی عمل ضرب در یک جمله ایها از طریق انجام یک فعالیت بیان شده است. در این فعالیت از خواص ضرب اعداد توان دار و جابه جایی بودن ضرب اعداد استفاده می شود.

فعالیت صفحه ۸۲:

بند(۱): خاصیت جابجایی ضرب اعداد و ضرب اعداد توان دار با پایه مساوی

بند(۲): ضریب عددی یک جمله ای طرف راست حاصلضرب ضرایب عددی یک جمله ایهای سمت چپ تساوی است.

بند(۳): توان یک متغیر در یک جمله ای سمت راست تساوی برابر است با مجموع توانهای همان متغیر در یک جمله ایهای سمت چپ تساوی.

بند(۴): درجه یک جمله ای سمت راست تساوی نسبت به یک متغیر برابر است با مجموع درجات یک جمله ایهای سمت چپ تساوی نسبت به همان متغیر.

بند(۵):

$$4x^2y^3z^2 \times 2xy^4w = (4\times 2)x^2y^3z^2xy^4w = 8x^{2+1}y^{3+4}z^2w = 8x^3y^7z^2w$$
$$-3x^2a \times \frac{1}{5}ya^2 = -3\times\frac{1}{5}x^2aya^2 = -\frac{3}{5}x^2a^{1+2}y = -\frac{3}{5}x^2a^3y$$

تمرین در کلا س صفحه ۸۳:

$$1)\ -3x^2 \times 5y^2 = -3\times 5x^2y^2 = -15x^2y^2$$
$$2)\ 4x^2y \times \frac{1}{2}xy^2 = 4\times\frac{1}{2}x^2yxy^2 = 2x^3y^3$$
$$3)\ 6xy \times 2y^2 \times \frac{1}{3}x^2y = 6\times 2\times\frac{1}{3}xyy^2x^2y = 4x^3y^4$$

مسائل صفحه ۸۳:

سؤال ۱) یک جمله ایها عبارتند از: $\frac{x^2yz^3}{3}\ ,\ -\frac{4}{5}xyz\ ,\ 4ab^2$

برای یک جمله ای $4ab^2$, ضریب عددی برابر ۴ و درجه نسبت a برابر ۱ و درجه نسبت b برابر ۲ است.

برای یک جمله ای $-\frac{4}{5}xyz$, ضریب عددی برابر $-\frac{4}{5}$ و درجه نسبت به هرکدام از x و y و z برابر ۱ است.

برای یک جمله ای $\frac{x^2yz^3}{2}$, ضریب عددی برابر $\frac{1}{2}$ و درجه نسبت به xبرابر ۲ و درجه نسبت به y برابر۱ و درجه نسبت به z برابر ۳ است.

سؤال ۲) الف: از آنجا که ۵+۴=۹ پس کافی است در جای مربع قرار دهیم $5a^2$.

ب: از آنجا که ۴-۱۶=۱۲ پس کافی است در جای مربع قرار دهیم $-4ax$.

ج: از آنجا که ۱-۲=۱ پس کافی است در جای مربع قرار دهیم $-ax$.

د: از آنجا که $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ پس کافی است در جای مربع قرار دهیم ab.

سؤال ۳)

$$4x^2-2x^2=(4-2)x^2=2x^2$$
$$0/5t-3/5t=(0/5-3/5)t=-3t$$
$$2xy^2-xy^2+5y^2x=(2-1+5)xy^2=6xy^2$$
$$\frac{ab}{2}-\frac{ba}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)ab=\left(\frac{3-2}{6}\right)ab=\frac{1}{6}ab$$
$$a^2b+3ba^2=4a^2b$$
$$2xyz-0/4yxz-1/6xyz=(2-0/4-1/6)xyz=0\times xyz=0$$

سؤال ۴)

$$4xy\times 5x^2y^3=(4\times 5)x^{1+2}y^{1+3}=20x^3y^4$$
$$2xy\times\frac{1}{3}x^2yz^2=\frac{2}{3}x^{1+2}y^{1+1}z^2=\frac{2}{3}x^3y^2z^2$$
$$\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)=\frac{1}{6}x^3y^3$$
$$(2x+4y)x=2x^2+4yx$$
$$4x(2y-3)=8xy-12x$$
$$\frac{x}{4}(a+b^2)=\frac{xa}{4}+\frac{xb^2}{4}$$

سؤال ۵)

$$a+2(b+c)=(a+2b)+2c=5+2\times 3=11$$

سؤال ۶) ابتدا نتیجه می گیریم شعاع هر دایره برابر a است و در نتیجه مساحت شکل باقیمانده برابر $16a^2 - 4\pi a^2 = (16-4\pi)a^2$ است. درجه این یک جمله ای برابر ۲ و ضریب عددی آن برابر $(16-4\pi)$ می باشد.

چندجمله ایها

در این قسمت, چند جمله ایها از طریق جمع یک جمله ایهای غیر متشابه معرفی شده اند و از طریق مثالها توضیح داده شده اند. سپس درجه چندجمله ایهای یک متغیره و نمایش استاندارد آنها از طریق مثالها توضیح داده شده است.

جمع و ضرب چند جمله ایها با استفاده از خواص اعداد و جمع و ضرب یک جمله ایها از طریق مثال بیان شده است. معلم می تواند برای تأکید بر علل تساوی های بیان شده در مثال ها, دلیل درستی هر کدام از اعمال انجام شده را از دانش آموز ان بخواهد . برخی از مثالهای صفحه ۸۵ زمینه برای معرفی اتحادها را فراهم می کنند.

مسائل (صفحه ۸۶)

سؤال ۱) محیط این مثلث برابر ۳a است و یک, یک جمله ای است و ضریب عددی آن برابر۳ و درجه آن برابر ۱ می باشد.

سؤال ۲)

$$(x+y)+(2x+3y)=3x+4y$$
$$(x^2-y^2)+(x^2+2y^2)=2x^2+y^2$$
$$(2x^2+5y)-(x^2+y^2)=2x^2+5y-x^2-y^2=x^2-y^2+5y$$
$$(4y+ax)+(x+y)=ax+x+5y$$
$$2x^2+xy+3x^2+yx=5x^2+2xy$$
$$\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}x-1=\frac{1}{2}x^2+(-4-\frac{1}{3}+\frac{2}{3})x-1=\frac{1}{2}x^2-\frac{17}{6}x-1$$
$$(10k^2-3kt+4k^2)-(3k^2+5kt)=10k^2-3kt+4k^2-3k^2-5kt=11k^2-8kt$$

سؤال ۳)

$$A-B=(1-2x^2)-(3x^2-4x+1)=1-2x^2-3x^2+4x-1=-5x^2+4x$$
$$A+B=(1-2x^2)+(3x^2-4x+1)=1-2x^2+3x^2-4x+1=x^2-4x+2$$
$$(A+B)-3C=(x^2-4x+2)-3(x^2-x)=x^2-4x+2-3x^2+3x=-2x^2-x+2$$
$$C^2=(x^2-x)^2=(x^2-x)(x^2-x)=x^2x^2-x^2x-xx^2+xx=x^4-2x^3+x^2$$
$$A^2=(1-2x^2)^2=(1-2x^2)(1-2x^2)=1\times1-2x^2-2x^2+2x^2\times2x^2=4x^4-4x^2+1$$
$$C^2-A^2=(x^4-2x^3+x^2)-(4x^4-4x^2+1)=-3x^4-2x^3+5x^2-1$$

سؤال ۴)

1) $4(x+y)=4x+4y$
2) $3x(y-z)=3xy-3xz$
3) $4x^3(x+y+1)=4x^4+4x^3y+4x^3$
4) $2x(x+3)+9x(x-4)=2x^2+6x+9x^2-36x=11x^2-30x$
5) $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$
6) $(a+b)(a+c)=a^2+ac+ba+bc$
7) $(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$

سؤال ۵) از روی شکل روشن است که:

مساحت مثلث راست + مساحت مستطیل + مساحت مثلث چپ = مساحت ذوزنقه

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{yh}{2}+ah+\frac{xh}{2}=\frac{yh+2ah+xh}{2}=\frac{\left[(y+a+x)+a\right]h}{2}=\frac{b+a}{2}h$$

سؤال ۶) در شکل دیده می شود که قطر ذوزنقه آن را به دو مثلث تقسیم کرده است و مساحت ذوزنقه مجموع مساحت این دو مثلث است. پس

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{bh+ah}{2}=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{a+b}{2}h$$

ارزشیابی یادگیری:

دانش آموزان در این بخش باید عبارت های جبری را به عنوان فرمولهایی برای محاسبه بشناسند و نمونه های هندسی و معنادار برای آنها ارائه کنند. بنابراین مناسب است در مثالهای مربوط به محاسبات کمیتهای واقعی مانند طول و مساحت و حجم اجسام داده شده از دانش اموزان بخواهیم عبارت های جبری مربوط به محاسبه آن کمیتها را ارائه کنند و برعکس با دادن عبارت های جبری مناسب از دانش آموزان بخواهیم تعبیری هندسی یا تعبیری در زمینه ای دیگر از آن ارائه کنند.

همچنین دانش آموزان باید بتوانند یک جمله ایها و چندجمله ایها را به عنوان عبارت های جبری خاص و ساده بشناسند و محاسبات جمع و تفریق و ضرب آنها را انجام دهند. ارائه حالتهای متنوعی که در محاسبات جبری بین یک جمله ایها و چندجمله ایها پیش می آید و درخواست از دانش آموزان برای انجام آن محاسبات به همراه ارائه توضیح توسط دانش آموز که علت درستی عملیات خود را بیان کند نشان دهنده سطح یادگیری دانش آموز خواهد بود.

مناسب است که محاسبات صرفا با اعداد صحیح نباشد و از اعداد اعشاری و گویا و رادیکالی نیز استفاده شود.

محدوده مطالب:

همانطور که در متن دیده می شود در این بخش اشاره مختصری به عبارت جبری شده است و بلافاصله به چند جمله ای ها (که رده ی مهمی از عبارت های جبری هستند) پرداخته شده است . در فصلهای بعدی به مقدار بیشتری در مورد عبارت های جبری صحبت خواهد شد ولی به هر صورت بیان عبارت های جبری پیچیده و کار گسترده روی آنها در این کتاب مورد نظر نیست. به ویژه درجه چندجمله ایهای چند متغیره, فقط نسبت به یک متغیر تعریف شده است و درجه نسبت به همه متغیرها در این کتاب تعریف نمی شود.

چالشهای احتمالی

برخی عبارتهای جبری ممکن است در نظر اول چندجمله ای به نظر نرسند ولی پس از ساده کردن به صورت چندجمله ای درآیند. مثلا $\sqrt{x^4}$ در واقع همان x^2 است پس باید آن را یک چندجمله ای یا یک جمله ای حساب کنیم. بنابراین شکل ظاهری عبارتهای جبری را نمی توان ملاک چندجمله ای بودن یا نبودن قرار داد. همچنین معمولا $\frac{x^2}{x}$ را با x یکی می گیریم پس باید این کسر را نیز یک جمله ای در

نپر بگیریم. البته برخی ممکن است بگویند $\frac{x^2}{x}$ در صفر تعریف نشده است ولی x در صفر تعریف شده است و نمی توان آنها را مساوی در نظر گرفت. این هم نکته مهمی است و قبل از این بحثها باید روشن کنیم که تحت چه شرایطی دو عبارت جبری را مساوی می دانیم. بحث کامل در این مورد را در فصل هفتم انجام خواهیم داد که با تقسیم عبارتهای جبری بر هم روبرو می شویم. در این فصل در باره چندجمله ایها چنین مشکلی نداریم و برای معلمینی که با دانش آموزان عادی و متوسط سر و کار دارند توصیه می کنیم دانش آموزان را وارد این چالشها نکنند. ولی اگر این مسائل توسط خود دانش آموزان مطرح شد یا دانش آموزان قویتری در کلاس حاضر بودند می توانید با یک مباحثه سعی کنید مسئله چگونگی و شرایط تساوی عبارتهای جبری را تجزیه و تحلیل کنید و پس از حل آن به راحتی می توان تعریف کرد که یک عبارت جبری چندجمله ای است هر گاه با یک چندجمله ای مساوی باشد. برای دیدن تعریف دقیق تساوی عبارتهای جبری به راهنمای تدریس فصل هفتم مراجعه کنید.

سطح بالاتر

برای دانش آموزان قویتر می توان مثالهای پیچیده تری از عبارت های جبری در زمینه های هندسی و فیزیکی مطرح ساخت و برای آنها محاسبات پیچیده تری را مطرح نمود. به ویژه می توان در مورد عبارتهایی جبری که در نظر اول چندجمله ای به نظر نمی رسند ولی پس از ساده کردن چندجمله ای می شوند طرح سوال نمود. توجه داشته باشید که در اینجا مشکلاتی در باره دامنه تعریف عبارتهای جبری ممکن است پیش آید و وارد شدن در این بحث وقتی می تواند به جواب مناسب برسد که دامنه تعریف متغیرها تعریف شوند و دو عبارت جبری به عنوان دو تابع با دامنه مشترک مساوی شوند. البته توصیه می کنیم وارد بحث تابع با دانش آموزان نشوید و حداکثر در حد دامنه تعریف عبارتهای جبری باقی بمانید.

بخش ۴-۴- اتحادها و تجزیه

اهداف بخش :

- آشنایی با مفهوم اتحاد
- آشنایی با اتحادهای مهم و تعبیر هندسی آنها
- استفاده از اتحادها در محاسبات جبری
- آشنایی با مفهوم تجزیه عبارت های جبری
- تجزیه عبارتها ی جبری ساده با استفاده از اتحادها

پیش نیاز ها :

عبارت های جبری – یک جمله ایها و چند جمله ای ها - اعمال جبری روی چند جمله ای ها -ویژگیهای اساسی اعمای جبری در اعداد

واژه های کلیدی :

اتحاد -جایگذاری – تجزیه – اتحاد مربع دو جمله ای ،یک جمله مشترک ،مزدوج ،تفاضل و مجموع مکعب دو جمله ای .

نگاه کلی به بخش:

این بخش با یک فعالیت برای معرفی مفهوم اتحاد شروع می شود. در این فعالیت مقادیر دو طرف یک اتحاد به ازای مقادیر مختلف عددی متغیر آن بررسی می شود و سپس به خاطر یکسانی مقادیر به دست آمده عبارت به دست آمده از تساوی آن دو عبارت جبری اتحاد نامیده می شود. بنابراین دانش آموزان باید اتحاد را به عنوان تساوی بین دو عبارت جبری بشناسند که همواره به ازای مقدارهای یکسان برای متغیرهایشان مقدار یکسانی ایجاد می کنند.

در اتحادها تساوی دو طرف, از طریق محاسبات جبری به دست می آید بنابراین در فعالیت پس از

حدس آن که دو طرف اتحاد مقادیر یکسانی ایجاد می کنند با محاسبات جبری درستی این حدس بررسی شده است. در یک تمرین در کلاس درک این مطلب که اتحادها با محاسبات جبری به دست می آیند تشخیص داده می شود. و در تمرین در کلاس بعدی تعبیر هندسی از اتحاد مربع دو جمله ای به صورت تمرین ارائه می شود.

امکان جایگزینی عبارتهای جبری روی متغیرهای یک اتحاد و به دست آوردن اتحادهای جدید در همین قسمت توضیح داده می شود و در تمرین در کلاسها روی آن تمرین می شود.

مفهوم تجزیه در ادامه همین مبحث آورده شده است و تجزیه به نوعی به صورت عکس عمل ضرب معرفی شده است. از آنجا که در اتحادها معمولا یک طرف به صورت مجموع و طرف دیگر به صورت حاصلضرب است اتحادها رابطه نزدیکی با تجزیه پیدا می کنند و هر اتحادی به نوعی یک تجزیه خاص را نشان می دهد. در تمرین در کلاسهای بعدی روی این مطلب تمرین می شود.

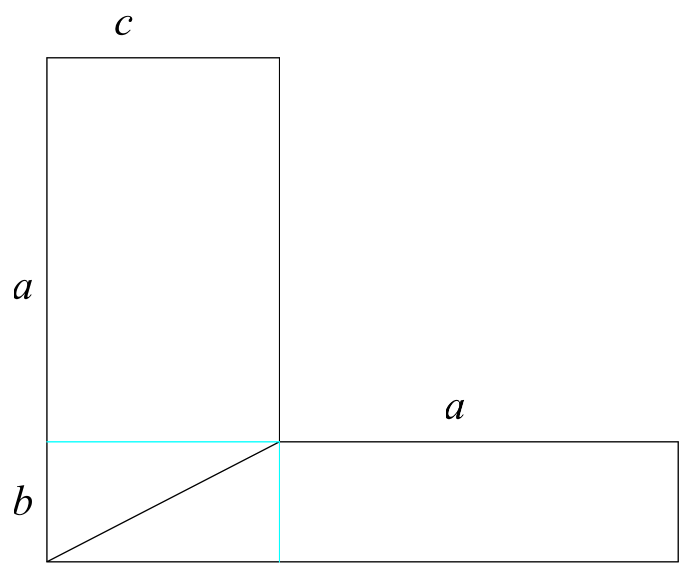
اتحادهای مزدوج (یا تفاضل مربعات) و یک جمله مشترک در فعالیتهایی از طریق هندسی ارائه می شوند و سپس با محاسبات جبری فرمول کلی آنها ارائه می شود. ولی اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب دو جمله ای و مکعب دو جمله ای مستقیما و با یک محاسبه جبری ارائه شدهاند و با مثالهایی توضیح داده شده اند.

در هر قسمت پس از معرفی هر اتحاد ،تجزیه مرتبط با آن نیز بررسی شده است و به کاربرد اتحادها در تسهیل محاسبات با اعداد بزرگ اشاره شده است.

ورود به مطلب :

نکته مهم در درک اتحاد آن است که دو عبارت جبری از لحاظ ظاهری متفاوت از لحاظ مقدارهای عددی که تولید می کنند ممکن است مانند یکدیگر باشند. بنابراین مناسب است که همانند کتاب دو عبارت جبری به ظاهر متفاوت را از لحاظ مقادیر عددی با هم مقایسه کنید. برای آن که عبارت های

مورد بررسی حالت طبیعی داشته باشند مناسب است که در حل یک مسئله واقعی تولید شده باشند. مثلا می توانید یک شکل هندسی که از قسمتهای متفاوت دایره ای و مربعی و مثلثی تشکیل شده است ارائه کنید و اضلاع آن را با نمادهای حرفی یکسان و غیر یکسان نشان دهید و از دانش آموزان بخواهید مساحت آن را حساب کنند. سعی کنید که شکل به گونه ای باشد تا روشهای متفاوتی برای محاسبه آن امکان پذیر باشد. مثلا به شکل زیر توجه کنید.



احتمالا دانش آموزان جوابهای متفاوتی ارائه می کنند و برای قضاوت در مورد درستی آن جوابها می توانید مقادیر عددی به دست آمده از هر کدام از آنها را با هم مقایسه کنید و همان روند فعالیت کتاب را دنبال کنید.

برای دیدن مواردی هم که اتحاد تشکیل نمی شود مناسب است که مثالهایی را ارائه کنید. مثلا همانند فعالیت صفحه ۷۸ جدولی تشکیل دهید و با طرح سؤالات ۱و ۲و ۳ فعالیت از آنها بخواهید که بگویند آیا تساوی $x^2 = -2x - 1$ به ازای همه مقادیر برقرار است؟

فعالیت آموزشی:

شروع این بخش با فعالیت صفحه ۸۷ است که برای آموزش مفهوم اتحاد است.

بند(۱):

x	x^2	$6x$	$(x+3)^2$	x^2+6x+9
-۳	۹	-۱۸	۰	۰
-۲	۴	-۱۲	۱	۱
۰	۰	۰	۹	۹
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۳	$\frac{49}{4}$	$\frac{49}{4}$

بند(۲): اعداد دو ستون با هم مساوی هستند، و حدس زده می شود که اعداد دو ستون به ازای بقیه مقادیر x نیز مساوی باشند

بند(۳): می توانید چند عدد اعشاری یا رادیکالی دیگر نیز قرار دهید و درستی حدس را بررسی کنید.

بند(۴): $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$ بله، این دو مقدار مساوی هستند.

در تمرین در کلاس صفحه ۸۷ با ارائه سه عبارت متفاوت دانش آموزان به اثبات و معرفی اتحاد مربع دو جمله ای هدایت می شوند.

بند(۱):

$$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2+5x+5x+25 = x^2+10x+25$$
$$(x+5)^2 = x^2+10x+25$$

بند(۲):

$$(2x-6)^2 = (2x-6)(2x-6) = 4x^2-12x-12x+36 = 4x^2-24x+36$$
$$(2x-6)^2 = 4x^2-24x+36$$

بند(۳):

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

فعالیت صفحه ۸۸ تعبیر هندسی اتحاد مربع دو جمله ای است که با استفاده از مساحت مستطیلها بیان شده است.

- مساحت دو مستطیل + مساحت دو مربع = مساحت مربع بزرگ

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

- نتیجه به دست آمده همان اتحاد مربع دو جمله ای است.

امکان جایگذاری یک متغیر با یک عبارت یا متغیر دیگر در یک اتحاد به خاطر برقراری تساوی بـه ازای هر مقداری برای متغیر است که در این قسمت از کتاب آورده شده اسـت. مهـارت در اسـتفاده از ایـن عمل, افزایش توانایی دانش آموز در استفاده از نقش جبری متغیر ها را در پی خواهد داشت.

در تمرین در کلاس بعدی ضمن جایگذاری متغیرهای اتحاد با عبارت های دیگر, شکلهای گوناگون یـک اتحاد دیده می شود.

تمرین در کلاس صفحه ۸۸:

۱)
$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$$
$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

۲)
$$(-1+y^2)^2 = (-1)^2 + 2(-1)(y^2) + (y^2)^2$$
$$= 1 - 2y^2 + y^4$$

۳)
$$(xz-y)^2 = (xz)^2 + 2(xz)(-y) + (-y)^2$$
$$= x^2z^2 - 2xyz + y^2$$

تمرین در کلاس صفحه ۸۹ برای آزمون میزان یادگیری و افزایش مهارت دانش آموز ان در اسـتفاده از اتحاد مربع دوجمله ای است:

$$(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$$
$$(ax-3)^2 = a^2x^2 - 6ax + 9$$

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$
$$(x-6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$$
$$(x^2-yz)^2 = x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$$

پس از معرفی اتحاد مربع دو جمله ای، بحث تجزیه به عنوان عکس عمل ضرب چند جمله ای ها مطرح شده است و به اتحاد مربع دو جمله ای از دید تجزیه پرداخته شده است . در تمرین در کـلاس بعـدی,

انتظار می رود دانش آموزان چند جمله ای ها را به صورت $A^2 + 2AB + B^2$ نوشته و سپس تجزیه شده آن را بنویسید.

تمرین در کلاس صفحه ۹۰

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x+5)^2$$
$$4a^2 + 4ax + x^2 = (2a)^2 + 2(2a)x + x^2 = (2a+x)^2$$
$$x^2y^2 - 8xy + 16 = (xy)^2 - 2 \times 4 \times xy + 4^2 = (xy-4)^2$$
$$x^4 - 2x^2yz + y^2z^2 = (x^2)^2 - 2x^2(yz) + (yz)^2 = (x^2 - yz)^2$$

مسائل صفحه ۹۰

سؤال ۱)

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$(2a+b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)b + b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$
$$(a-3b)^2 = a^2 - 2a(3b) + (3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2$$
$$(4a-2)^2 = (4a)^2 - 2(4a)2 + 2^2 = 16a^2 - 16a + 4$$
$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = (2x)^2 + 2(2x)\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$
$$(x+2)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 2x - 1 = 6x + 3$$

سؤال ۲)

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 2a \times 2 + 2^2 = (a+2)^2 = (a+2)(a+2)$$
$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \times 3y + 3^2 = (y-3)^2 = (y-3)(y-3)$$
$$9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2(3x) \times 1 + 1^2 = (3x-1)^2 = (3x-1)(3x-1)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$

در فعالیت صفحه ۹۰ اتحاد مزدوج ابتدا به صورت هندسی مطرح شده است و سپس به صـورت جبـری نیز معرفی شده است.

بند(۱): $(a+b)(a-b) = (a-b)a + (a-b)b = a^2 - b^2$

بند(۲): اتحاد به دست آمده: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

بند (۳): $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$ هر دو اتحاد یکی هستند.

تجزیه با استفاده از اتحاد مزدوج ابتدا با دو مثال عنوان شده است و سپس دو تمرین در کلاس از دانش آموزان خواسته شده است تا میزان یادگیری آنها سنجیده شود.

تمرین در کلاس صفحه ۹۱:

بند (۱):

$$(x+4)(x-4)=x^2-16$$
$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$$
$$(ab+x)(ab-x)=(ab)^2-x^2=a^2b^2-x^2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{1}{4}$$

بند (۲):

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$
$$4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$$
$$\left(\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}\right)=\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{3}\right)$$
$$x^2y^4-9z^2=(xy^2-3z)(xy^2+3z)$$

از کاربرد اتحاد مربع دوجمله ای و مزدوج در محاسبات نیز دومثال در کتاب مطرح شده است ولی شما می توانید مثالهای متنوع تری را مطرح نمایید.

اتحادیک جمله مشترک نیز ابتدا به صورت هندسی معرفی و سپس به صورت جبری درستی آن بررسی شده است

فعالیت صفحه ۹۱:

بند (۱): مساحت سه مستطیل + مساحت مربع = مساحت مستطیل

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+a$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

بند (۲): $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$ هر دو اتحاد یکی هستند.

در مثالهای این قسمت تجزیه عبارت ها به کمک اتحاد یک جمله مشترک عنوان شده است و در تمرین در کلاس این مفهوم از دانش آموزان خواسته شده است.

تمرین در کلاس صفحه ۹۲

سؤال ۱)

$$(x+1)(x+2) = x^2 + (1+2)x + 1\times 2 = x^2 + 3x + 2$$
$$(2x-1)(2x+4) = (2x)^2 + (-1+4)\times 2x + (-1)\times 4 = 4x^2 + 6x - 4$$
$$(ax+5)(ax+b) = a^2x^2 + (b+5)ax + 5b$$
$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

سؤال۲)

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + (1+3)x + 1\times 3 = (x+1)(x+3)$$
$$x^2 + x - 2 = x^2 + (-1+2)x + (-1)\times 2 = (x-1)(x+2)$$
$$x^2 - 6x + 8 = x^2 + [(-2)+(-4)]x + (-2)(-4) = (x-2)(x-4)$$

سؤال۳) با فرض $A = 3x^2 + 5x - 2$ داریم

$$3A = 9x^2 + 15x - 6 = (3x)^2 + 5(3x) - 6 = (3x-1)(3x+6)$$

بنابراین $3x^2 + 5x - 2 = A = \frac{(3x-1)(3x+6)}{3} = (3x-1)(x+2)$

اتحادهای تفاضل و مجموع مکعب دو جمله و مکعب دو جمله ای از طریق یک فعالیت محاسباتی معرفی شده اند و مثال هایی در ارتباط با این اتحاد و تجزیه به کمک این اتحاد عنوان شده است.

فعالیت صفحه ۹۳

بند ۱) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرار است و یک اتحاد است.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

بند ۲) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

بند ۳)

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقداری از a و b برقرار است و یک اتحاد است.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

بند ۴) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

تمرین در کلاس صفحه ۹۴

سؤال (۱)

$$(x+2)(x^2-2x+4) = x^3+2^3 = x^3+8$$
$$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) = (2x-3y)((2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2) = 8x^3-27y^3$$
$$(x+5)^3 = x^3+3x^2\times 5+3x\times 5^2+5^3 = x^3+15x^2+75x+125$$

سؤال (۲)

$$x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$$
$$27x^3-\frac{1}{8} = (3x)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)$$
$$a^6-64b^6 = a^6-(2b)^6 = (a^3-(2b)^3)(a^3+(2b)^3)$$
$$= (a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$$

مسائل صفحه ۹۴

مسئله ۱) کدامیک از تساویهای زیر اتحاد هستند؟

برای اثبات اتحاد بودن تساوی دو عبارت جبری لازم است با محاسبات جبری از یک طرف, طرف دیگر را به دست آورد. اما برای این که نشان دهیم یک تساوی داده شده اتحاد تشکیل نمی دهد باید به ازای مقداری برای متغیرها, مساوی نبودن مقدارهای عددی عبارتهای جبری در دو طرف را نشان داد.

- $x+x=2x$ اتحاد است.

- $x + x = x^2$ اتحاد نیست. مثلا به ازای $x = -1$ دو طرف مساوی نیستند.

- $x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$ اتحاد است زیرا

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$$

- $3x + y = x + 3y$ اتحاد نیست. مثلا به ازای $x = 0$ و $y = 1$ طرفین مقدار مساوی ندارند.

- $y^2 + 1 = y$ اتحاد نیست. مثلا به ازای $y = 1$ طرفین مقدار مساوی ندارند.

- $(x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1) = x^6 - 1$ اتحاد است زیرا

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1) &= (x^2-1)(x^4 + x^2 + 1)\\ &= x^6 + x^4 + x^2 - x^4 - x^2 - 1 = x^6 - 1\end{aligned}$$

مسئله ۲)

$$(x-1)(x+5) = x^2 + 4x - 5$$
$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$
$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$$
$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{4} - x^2$$

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$
$$(2x-4)(2x+3) = (2x)^2 - 2x - 12 = 4x^2 - 2x - 12$$
$$(2a-3)(2a+3) = 4a^2 - 9$$
$$(4x+5)(4x+3) = 16x^2 + 32x + 15$$
$$\left(\frac{1}{3} - 2x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{1}{9} - x + 2x^2$$

مسئله ۳)

$$4 - a^2 = (2-a)(2+a)$$
$$4x^2 - 9 = (4x-3)(4x+3)$$
$$16x^2 - 36y^2 = (4x-6y)(4x+6y)$$
$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$$
$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$
$$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$$

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{25} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)$$
$$a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$$
$$x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$$
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

مسئله ۴)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=x^3-\frac{1}{8}$$
$$(2a-3b)\left(4a^2+6ab+9b^2\right)=8a^3-27b^3$$
$$(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)=8x^3+1$$
$$(2a+1)^3=8a^3+12a^2+6a+1$$
$$(ax-1)^3=a^3x^3-3a^2x^2+3ax-1$$

$$(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=x^3-8$$
$$(x+3)\left(x^2-3x+9\right)=x^3+27$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}$$
$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$
$$(a-2)^3=a^3-6a^2+12a-8$$

مسئله ۵)

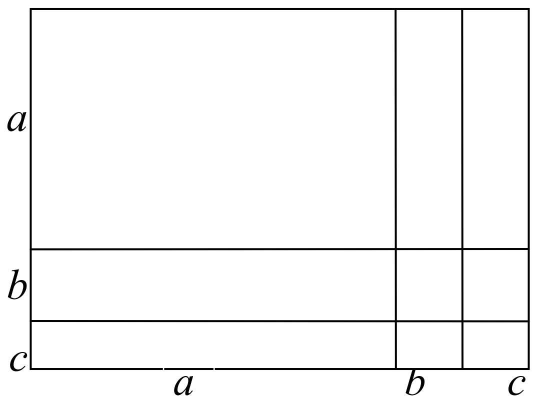
$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$
$$27x^3-y^3=(3x-y)\left(9x^2+3xy+y^2\right)$$
$$b^3+\frac{8}{27}=\left(b+\frac{2}{3}\right)\left(b^2+\frac{2}{3}b+\frac{4}{9}\right)$$
$$y^3-6y^2+12y-8=(y-2)^3$$
$$=(y-2)(y-2)(y-2)$$

$$x^3-27=x^3-3^3=(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$$
$$a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)\left(a^2-2ab+4b^2\right)$$
$$a^3-\frac{1}{8}=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$$
$$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$$
$$=(x+1)(x+1)(x+1)$$

مسئله ۶)

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$$
$$x^8-1=(x^4)^2-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$
$$x^9+1=(x^3)^3+1=(x^3+1)(x^6-x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)$$
$$x^6-3x^4+3x^2-1=(x^2-1)^3=(x-1)^3(x+1)^3$$
$$x^4+x^2-2=(x^2+2)(x^2-1)(x^2+2)(x-1)(x+1)$$
$$x^5-x=x(x^4-1)=x(x^2-1)(x^2+1)=x(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

مسئله ۷)

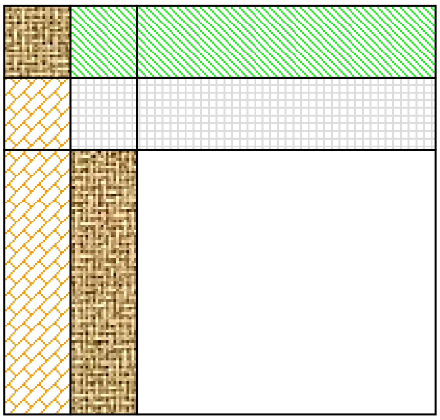


$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$[a+(-b)+c]^2=a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2ac+2(-b)c=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

مسئله ۸)

$$(x+y)^2-(x-y)^2=\left[(x+y)+(x-y)\right]\times\left[(x+y)-(x-y)\right]=2x\times 2y=4xy$$
$$(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)=4xy$$

عبارت $(x+y)^2-(x-y)^2$ در شکل زیر به اندازه مساحت قسمت رنگی است. هر قسمت با رنگهای یکسان مساحت xy دارد پس این مساحت $4xy$ است.



برای اثبات تساوی ابوبکر محمدبن حسین کرجی که در صفحه ۹۵ آمده است چون طرفین اعداد مثبتی هستند کافی است توان دوم آنها مساوی باشند. توان دوم طرف اول برابر $A+B$ است و اگر طرف دوم را X بنامیم داریم:

$$X^2=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}\times\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}+\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$$
$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}+2\sqrt{A^2-(\sqrt{A^2-B^2})^2}+A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$$
$$=\frac{2A+2\sqrt{A^2-(A^2-B^2)}}{2}=A+\sqrt{B^2}=A+B$$

ارزیابی یادگیری:

در این بخش دانش آموزان باید معنا و مفهوم اتحادها را بشناسند و بتوانند نمونه های چند اتحاد اصلی را

در محاسبات با عبارت های جبری تشخیص دهند و در محاسبات از آنها استفاده کنند. به ویژه باید دلیل درستی جایگذاری عبارت ها در متغیرهای اتحادها را بدانند و از آن در محاسبات استفاده کنند.

همچنین دانش آموزان باید بتوانند تعبیر هندسی اتحادها را توضیح دهند و در محاسبات با اعداد بزرگ از اتحادها استفاده نمایند. دانش آموزان باید بتوانند تجزیه های ساده را با استفاده مستقیم از اتحادها انجام دهند. بنابراین می توان با طرح سوالات مناسب مهارتها و دانش های بالا را در دانش آموزان ارزیابی کرد.

محدوده مطالب:

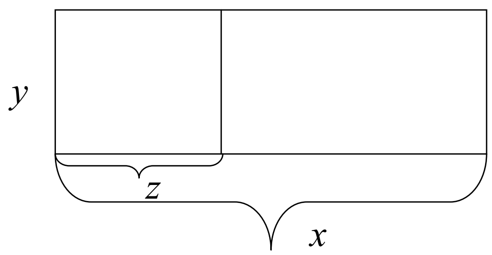
درک مفهوم اتحاد , روشهای تشخیص اتحادها , شناختن چند اتحاد اصلی و ایجاد مهارت در کار با اتحادها برای استفاده از آن ها در محاسبات و عملیات جبری و تجزیه های ساده هدف اصلی این بخش است. استفاده از عبارت ها و محاسبات پیچیده جبری مورد نظر نمی باشد و در قسمت تجزیه نیز تجزیهٔ عبارات ساده جبری که با استفاده مستقیم از اتحادها قابل انجام است مورد نظر است و به طرح عبارت های هم سطح کتاب اکتفا نمایید.

نکات مهم

از لحاظ سختی محاسباتی تجزیه کار بسیار مشکلی است و لزومی ندارد وقت دانش آموزان را برای ایجاد تبحر در این مورد صرف کنیم. توانایی تجزیه کردن عبارت های جبری پیچیده نشان دهنده درک بهتر دانش آموزان از ریاضی نیست و بیشتر نیازمند اعمال تکنیکی است. بنابراین مناسب است که مبحث تجزیه را در یک سطح محدود نگاه داریم و در حد استفاده مستقیم از اتحادها در مورد تجزیه کار کنیم. تشخیص مفهوم اتحاد و روشهای به دست آوردن اتحادها و تشخیص اتحاد نبودن بسیار مهمتر از تجزیه مکانیکی عبارت های جبری است.

سوالات نمونه فصل چهارم

۱. در یک مستطیل به طول ضلعهای x و y روی ضلع به طول x آن نقطه ای انتخاب می کنیم و طول پاره خط ساخته شده روی این ضلع را z می نامیم.

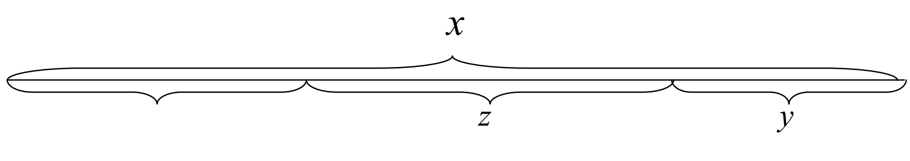


در شکل بالا سه مستطیل وجود دارد, مساحت این مستطیلها را بنویسید و رابطه بین آنها را از طریق عمل تفریق بنویسید.

جواب: مساحت بزرگترین مستطیل xy و مساحت مستطیلهای کوچکتر zy و $(x-z)y$ است و داریم

$$(x-z)y = xy - zy$$

۲. تساوی $x-(y+z)=(x-y)-z$ را به زبان فارسی توضیح دهید. در شکل زیر پاره خطهای به طولهای $x-(y+z)\ ,\ (x-y)-z\ ,\ x-y\ ,\ y+z$ را به دست آورید و درستی تساوی گفته شده را نتیجه بگیرید.

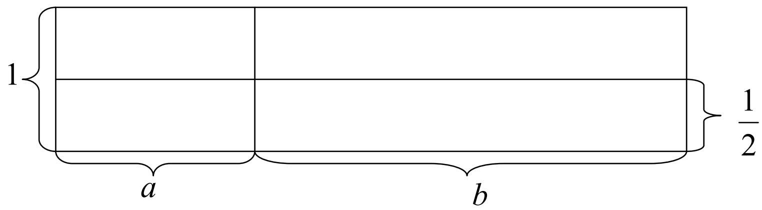


جواب: حاصل تفریق مجموع دو عدد مانند z و yاز یک عدد دیگر مانند x برابر است با تفریق z از حاصل تفریق y از x.

۳. در هر یک از تساویهای زیر با ذکر یک مثال نشان دهید این تساویها درست نمی باشند.

$$a-b+c=a-(b+c)$$
$$-(a-b-c)=-a-b-c$$
$$-a-b=-(a-b)$$

۴. درستی تساوی $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$ را از طریق شکل زیر توضیح دهید.



جواب: کافی است مجموع مساحت دو مستطیل پایینی را یک بار مستقیما حساب کنیم و بار دیگر توجه کنیم که این مساحت نصف مساحت کل است.

۵. با استفاده از تعریف تقسیم درستی تساویهای زیر را نشان دهید. در زیر فرض بر آن است که $a\neq 0$.

$$\frac{a}{a}=1 \quad , \quad \frac{a}{1}=a \quad , \quad \frac{0}{a}=0$$

جواب: از آنجا که $1\times a=a$ طبق تعریف تقسیم داریم $\frac{a}{a}=1$.

از آنجا که $a\times 1=a$ طبق تعریف تقسیم داریم $\frac{a}{1}=a$.

از آنجا که $0\times a=0$ طبق تعریف تقسیم داریم $\frac{0}{a}=0$.

۶. نشان دهید کسری که صورت و مخرج آن عدد گویا هستند, عددی گویا است.

جواب: فرض کنید $r=\frac{m}{n}$ و $s=\frac{k}{l}$ دو عدد گویا باشند و صورت و مخرج این کسرها اعداد صحیح باشند. در این صورت

$$\frac{r}{s}=r\div s=\frac{m}{n}\div\frac{k}{l}=\frac{m}{n}\times\frac{l}{k}=\frac{ml}{nk}$$

پس $\frac{r}{s}$ به صورت کسری است که صورت و مخرج آن دو عدد صحیح هستند بنابراین یک عدد گویا است.

۷. برای سه عدد a و b و c که مجموع آنها مخالف صفر است مقدار زیر را حساب کنید.

$$\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}$$

جواب: ۲

۸. اگر a و b دو عدد متمایز باشند مقدار زیر را حساب کنید.

$$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$$

جواب: ۱

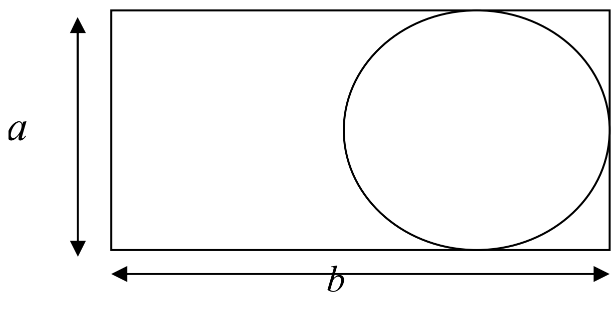
۹. عبارت های فارسی زیر را به صورت یک عبارت جبری بنویسید:

الف) جذر مجموع مربع یک عدد با مکعب همان عدد. **جواب**: $\sqrt{x^2+x^3}$

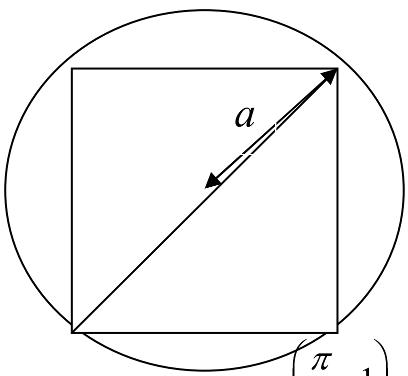
ب) مجموع مساحت یک نیمدایره به شعاع r و یک مربع به ضلع r **جواب**: $\frac{1}{2}\pi r^2+r^2$

ج) مساحت سطح بین یک دایره به شعاع a و یک مربع به ضلع $2a$ که آن دایره را در برگرفته است. **جواب**: $4a^2-\pi a^2$

۱۰. در هر کدام از شکلهای زیر عبارت جبری داده شده را به عنوان مساحت با هاشور مشخص کنید.



$ab-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)a^2$



$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$

۱۱.اگر $A = xy^3$, $B = y^2z$, کوچکترین یک جمله ایهایی از لحاظ درجه که اگر یکی در A و یکی در B ضرب شوند شرایط زیر بر قرار می شود را بنویسید.

الف)دو یک جمله ای متشابه **جواب**: z را در A و xy را در B ضرب می کنیم.

ب) دو یک جمله ای متشابه و قرینه **جواب**: $-z$ را در A و xy را در B ضرب می کنیم.

ج) مربع یکی با دیگری برابر باشد. **جواب**: z را در A و x^2y^4z را در B ضرب می کنیم.

سوالات زیر در سطوح مختلفی هستند و ممکن است برخی آسان و برخی مشکل باشند که با توجه به سطح دانش آموزان خود می توانید از آنها استفاده کنید.

۱۲.با استفاده از اتحادها نشان دهید هر عدد طبیعی فرد به صورت تفاضل مربع دو عدد طبیعی متوالی است. **جواب**: $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

۱۳.چه رابطه ای بین تفاضل مربع دو عدد زوج متوالی و مجموع آن دو عدد وجود دارد؟

جواب: $(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 2(4n+2)$. تفاضل مربعات دو عدد زوج متوالی برابر دو برابر مجموع آن دو عدد است.

۱۴.در یک مثلث قائم الزاویه مربع یکی از اضلاع قائم برابر مجموع دو ضلع دیگر است. نشان دهید که در این صورت وتر یک واحد بیشتر از ضلع دیگر است. بر عکس اگر وتر مثلث قائم الزاویه ای یک واحد بیشتر یکی از اضلاع باشد نشان دهید مربع ضلع دیگر برابر مجموع دو ضلع دیگر است.

جواب: اگر اضلاع مجاور زاویه قائمه را با a و b و وتر را با c نشان دهیم در حالت اول داریم $a^2 = b + c$ از طرف دیگر $c^2 = a^2 + b^2$ بنابراین

$$\begin{aligned}
&c^2 = b + c + b^2 \\
&c^2 - b^2 = b + c \\
&(c-b)(c+b) = b + c \\
&c - b = 1 \\
&c = b + 1
\end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم $c=b+1$ با یک محاسبه ساده داریم

$$a^2=c^2-b^2=(b+1)^2-b^2=2b+1=c+b$$

۱۵.با استفاده از اتحادها حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

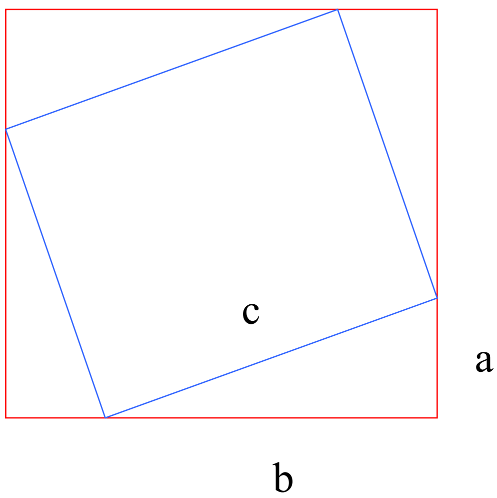
الف) 999^3 ب) 114×126 ج) 122×117

جواب: الف) $999^3=(1000-1)^2=1000000-2000+1=998001$

ب) $114\times126=(120-6)(120+6)=14400-36=14364$

ج) $122\times117=(120+2)(120-3)=14400-120-6=14274$

۱۶.با استفاده از شکل زیر و اتحادها, درستی قضیه فیثاغورس را نشان دهید.



جواب: مساحت مربع بزرگ $(a+b)^2$ است و برابر است با مجموع چهار مثلث یکسان و یک مربع با ضلع c. بنابراین

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$$
$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$
$$a^2+b^2=c^2$$

۱۷.اگر $x+x^{-1}=p$ حاصل عبارت های زیر را بر حسب p , به کمک اتحادها به دست آورید. (در قست (ج) فرض کنید $1<x$)

الف) x^2+x^{-2} 　　 ب) x^3+x^{-3} 　　 ج) $x-x^{-1}$

جواب: الف) $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2xx^{-1}=p^2-2$

ب) $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2-xx^{-1}+x^{-2})=p(x^2+x^{-2}-1)=p(p^2-3)$

ج) $x-x^{-1}=\sqrt{(x-x^{-1})^2}=\sqrt{x^2-2xx^{-1}+x^{-2}}=\sqrt{x^2+x^{-2}-2}=\sqrt{p^2-4}$

۱۸. اگر $x+y=s$, $xy=p$, حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها برحسب p و s به دست آورید.

(در قسمتهای (ب) و (د) فرض کنید $y>x$)

الف) x^2+y^2 　　 ب) $x-y$ 　　 ج) x^3+y^3 　　 د) x^3-y^3

جواب: الف) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=s^2-2p$

ب) $x-y=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2xy}=\sqrt{s^2-2p-2p}=\sqrt{s^2-4p}$

ج) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=s(s^2-2p-p)=s(s^2-3p)$

د) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=\sqrt{s^2-4p}\,(s^2-2p+p)=\sqrt{s^2-4p}\,(s^2-p)$

۱۹.اتحاد های مربع مجموع دو جمله ای و مزدوج را با یک جایگذاری مناسب از اتحاد یک جمله مشترک به دست آورید.

جواب: داریم: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$. اگر قرار دهیم $a=b$ اتحاد مربع مجموع دو جمله ای و اگر قرار دهیم $b=-a$ اتحاد مزدوج به دست می آید.

۲۰.اتحاد مجموع مکعبات (تفاضل مکعبات)دو جمله ای را از طریق محاسبات جبری روی اتحاد مکعب دو جمله ای به دست آورید.

جواب:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)(a+b)^2-3ab(a+b)\\
&=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)\\
&=(a+b)(a^2-ab+b^2)
\end{aligned}$$