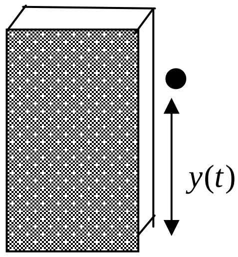
فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

حد توابع

اگر سنگی را از بالای یک ساختمان ۱۶ متری رها کنیم طبق قوانین فیزیکی ارتفاع آن در هر لحظه t به صورت $y(t)=16-5t^2$ است که t بر حسب ثانیه و $y(t)$ بر حسب متر است.



حل یک مسئله

چگونه می توان سرعت سقوط این سنگ را در هر لحظه حساب کرد؟

این سوالی بود که نیوتون از خود پرسید. نیوتون فیزیکدانی بود که حدود ۳۰۰ سال پیش می زیسته است و با طرح چنین مسائلی و حل آنها علم حسابان را پایه ریزی نمود.

معلم از دانش آموزن پرسید: آیا می دانید سرعت یک متحرک چیست و آن را چگونه حساب می کنند؟

سعید: من ورزشکار هستم و در تمرینها زیاد می دوم. معمولا موقع دویدن در هر ثانیه ۲ متر جلو می روم، یعنی سرعت من ۲ متر بر ثانیه است.

معلم: بله اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، در هر ثانیه مسافت یکسانی طی می کند و اگر این مسافت v متر باشد، گوییم سرعت آن v متر بر ثانیه است. به طور کلی متحرکهایی که با سرعت ثابت حرکت می کنند در هر فاصله زمانی(بر حسب ثانیه) $[t_1\ ,\ t_2]$ اگر a متر طی کرده باشند مقدار $\dfrac{a}{t_2-t_1}$ ثابت است و همان سرعت متحرک بر حسب متر بر ثانیه است.

علی: اما اگر متحرکی سرعت ثابت نداشته باشد و سرعت آن در حال تغییر باشد در هر لحظه سرعت آن را چگونه حساب کنیم؟

محسن: من هر وقت سوار ماشین می شوم، ماشین از حالت ایستاده شروع به حرکت می کند و سرعت خود را از صفر تا ۵۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می دهد و در هر لحظه عقربه سرعت شمار مقدار سرعت را نشان می دهد که از صفر تا ۵۰ افزایش می یابد.

معلم: بله ماشین در هر لحظه سرعتی دارد و این سرعت در حال افزایش است ولی آنچه که ما از ماشین می توانیم ببینیم آن است که در هر لحظه چند متر به جلو رفته است. آیا با دانستن این مطلب ما می توانیم تشخیص دهیم سرعت ماشین در هر لحظه چقدر است؟

سعید: اگر در هر لحظه ما بدانیم متحرک چقدر حرکت کرده است، از یک لحظه t_1 تا چند لحظه بعد مانند t_2 می توانیم حساب کنیم چند متر حرکت کرده است. اگر مسافت طی شده بین این دو لحظه a متر باشد مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ را می توان سرعت متحرک در فاصله زمانی $[t_1 \ , \ t_2]$ بدانیم.

محسن: این درست نیست، ما می خواهیم بدانیم سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است، این عدد چنین چیزی را به ما نمی گوید.

معلم: محسن درست می گوید ولی سعید گام مهمی را در حل مسئله برداشته است. مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ سرعتی را نشان می دهد که اگر متحرک در فاصله زمانی $[t_1 \ , \ t_2]$ به طور ثابت با آن سرعت حرکت می کرد به همان جایی می رسید که اکنون رسیده است. این مقدار را در فیزیک سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $[t_1 \ , \ t_2]$ می نامند.

محسن: ما چگونه می توانیم از طریق سرعت متوسط به سرعت لحظه ای برسیم؟

سعید: اگر t_2 به t_1 نزدیک باشد، مقدار متوسط سرعت نیز باید به سرعت لحظه ای نزدیک باشد. بنابراین بهتر است ببینیم زمانی که t_2 به t_1 نزدیک می شود، سرعت متوسط به چه عددی نزدیک می شود.

معلم: نکات خوبی را مطرح کردید، بیایید ببینیم که آیا با این روش می توانیم سرعت سقوط سنگ را در هر لحظه حساب کنیم.

فعالیت

۱- در مسئله سقوط سنگ، پس از گذشت ۱ ثانیه سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۲- اگر h عددی کوچک باشد در لحظه $1+h$ سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۳- بین دو لحظه ۱ و $1+h$ سنگ چند متر حرکت کرده و این حرکت در چند ثانیه انجام شده است؟

٤- اگر h ناصفر باشد، سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ و چقدر است؟

٥- اگر h منفی باشد لحظه $1+h$ چه معنایی دارد؟

٦- جدول زیر را تکمیل کنید.

h	$-0/1$ $\quad -0/01$ $\quad -0/001$ $\quad \to \quad 0 \quad \leftarrow$ $\quad 0/001$ $\quad 0/01$ $\quad 0/1$
سرعت متوسط	$\to \quad ? \quad \leftarrow$

۷- اگر h ناصفر باشد و آن را به تدریج کوچک و کوچکتر کنیم و به صفر نزدیک کنیم، سرعت متوسط سنگ به چه عددی نزدیک می شود؟ این عدد چه چیزی را نشان می دهد؟

در فعالیت بالا سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ وابسته به مقدار h است و تابعی بر حسب h می باشد که اگر آن را با $g(h)$ نشان دهیم داریم

$$g(h)=\frac{(16-5\times1^2)-(16-5(1+h)^2)}{h}=5h+10$$

توجه کنید که $g(h)$ فقط برای h های ناصفر تعریف شده است و ما حق نداریم به جای h صفر قرار دهیم، با اینحال ما دقیقا می خواهیم بدانیم مقدار این تابع در $h=0$ چقدر باید باشد. (چرا؟).

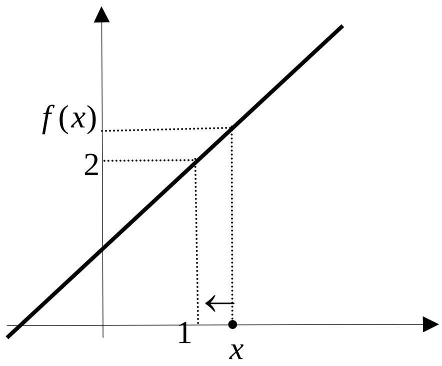
اگرچه ما حق نداریم جای h صفر قرار دهیم ولی می توانیم مقدارهای ناصفر کوچک جای h قرار دهیم و هر چقدر دلمان بخواهد آن را کوچکتر کنیم و بررسی کنیم مقدارهای $g(h)$ چگونه تغییر می کنند و آیا به عدد خاصی نزدیک می شوند؟

تمرین در کلاس

۱- برای تابع $f(x)=x+1$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می شوند؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\to 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				$\to ? \leftarrow$			

۲- نمودار تابع $f(x)=x+1$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می شوند.



۳- برای توابع $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ و $k(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$ نیز با رسم جدول و نمودار آنها بررسی کنید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می شوند.

۴- سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوتها و چه شباهتهایی دارند و چه چیز باعث شده است که همه آنها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند.

۵- جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می شود مقدار تابع $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ به چه عددی نزدیک می شود؟

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$\sin x$							۰/۰۰۰۹۹۹۹۹	۰/۰۰۹۹۹۹	۰/۰۹۹۸۳
$\frac{\sin x}{x}$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			

در تمرینهای بالا با تابعی مانند $f(x)$ روبرو بودیم که متغیر x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک می شد و این سوال مطرح بود که آیا مقدارهای $f(x)$ نیز به عدد خاصی نزدیک می شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع f در نقطه a می نامند.

برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

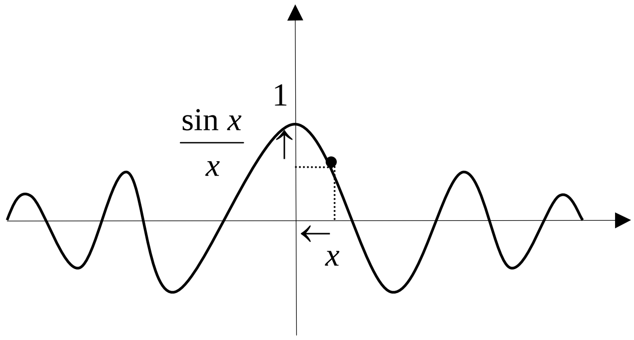
عبارت بالا را به صورت «حد $f(x)$ در نقطه a برابر L است» بخوانید.

به طور دقیقتر، $\lim_{x\to a} f(x) = L$ به معنای آن است که اگر x (در دامنه f) به اندازه کافی به a نزدیک شود آنگاه فاصله $f(x)$ تا L از هر مقداری که انتخاب کرده ایم کوچکتر می شود.

مثال: حد تابع $\frac{x^2-1}{x-1}$ در نقطه ۱ برابر ۲ است، $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

مثال: با محاسبه مقدارهای تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ برای مقدارهای x نزدیک صفر می توان

حدس زد که حد آن در صفر برابر ۱ است، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.



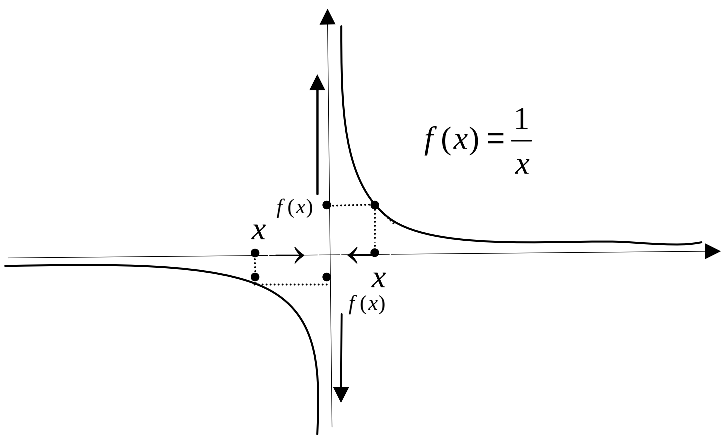
فعالیت

۱. برای تابع $\frac{1}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع در صفر را بررسی کنید.

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\to$	0	$\leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$\frac{1}{x}$				$\to$	$?$	$\leftarrow$			

۲. آیا مقدارهای $\frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می شود، به عدد خاصی نزدیک می شوند؟

جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{1}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه ای حتما حد داشته باشد.
توابعی مانند f هستندکه مقدارهای آنها، با نزدیک شدن x (در دامنه f) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی شوند. گوییم این گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ در نقاط ۱ و ۱- حد ندارد، زیرا با نزدیک شدن x به ۱ یا ۱- مقدارهای $\dfrac{x}{x^2-1}$ به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی شوند و از لحاظ قدرمطلق مرتبا افزایش می یابند.

حد چپ و حد راست

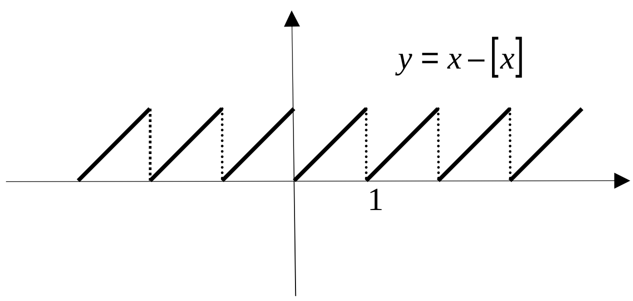
فعالیت

۱. جدول زیر را برای تابع $x-[x]$ تکمیل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$x-[x]$				$\rightarrow\ ?\ \leftarrow$			

۲. اگر x با مقدارهای بزرگتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x-[x]$ به عدد خاصی نزدیک می شوند؟ اگر x با مقدارهای کوچکتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x-[x]$ به عدد خاصی نزدیک می شوند؟ آیا این دوعدد یکی هستند؟

۳. نتایج خود را روی نمودار تابع $x-[x]$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



۴. آیا تابع $x-[x]$ در ۱ حد دارد؟

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L است.

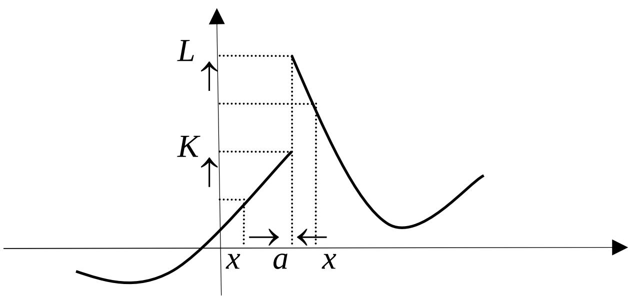
این مطلب را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد K است.

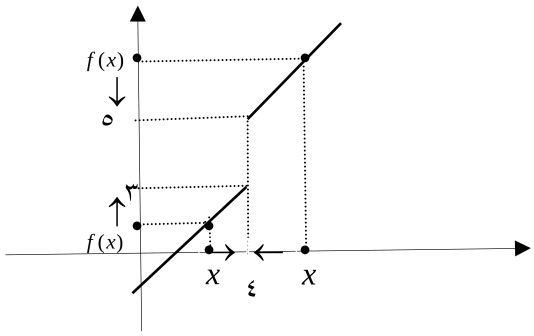
این مطلب را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<4 \\ x+1 & 4<x \end{cases}$ در زیر رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<4 \\ x+1 & 4<x \end{cases}$$



این تابع در نقطه $x=4$ تعریف نشده است و دیده می شود که با نزدیک شدن x به ٤ با مقدارهای بزرگتر از ٤، مقدارهای $f(x)$ به ۵ نزدیک می شوند، یعنی

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=5$$

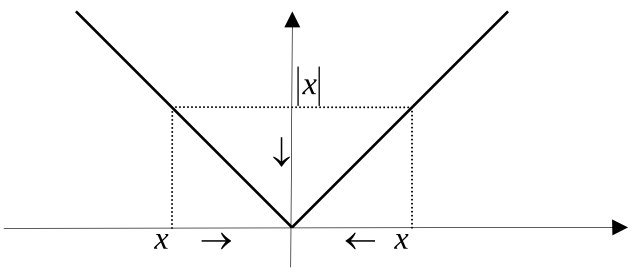
همچنین با نزدیک شدن x به ٤ با مقدارهای کوچکتر از ٤، مقدارهای $f(x)$ به ۳ نزدیک می شوند، یعنی $\lim_{x\to 4^-} f(x)=3$. بنابراین، این تابع در ٤ حد ندارد.

تذکر: در علامتگذاری حد راست و چپ نمادهای «+» و «−» معنای راست و چپ دارند، نه مثبت و منفی.

با توجه به مفهوم حدهای چپ و راست، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

اگر تابعی در نقطه ای حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه ای موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.

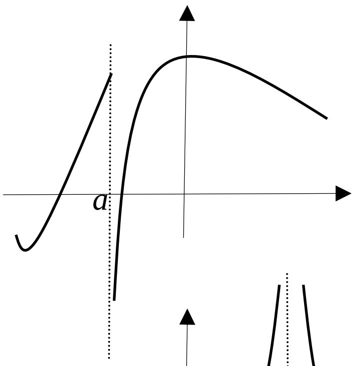
مثال: حد تابع $|x|$ را در صفر بررسی می کنیم.

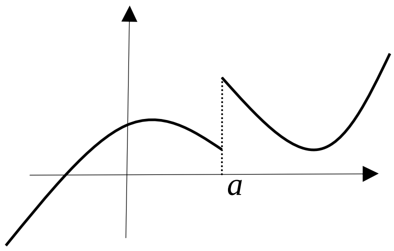


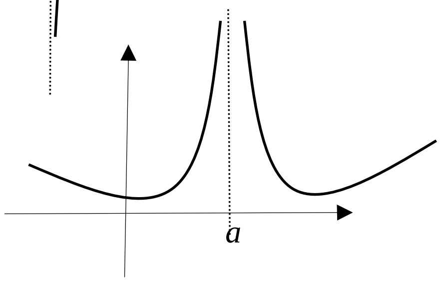
با نزدیک شدن x به صفر چه از چپ و چه از راست $|x|$ به صفر نزدیک می شود، یعنی حد چپ و حد راست هر دو موجودند و برابر صفر می باشند، پس $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

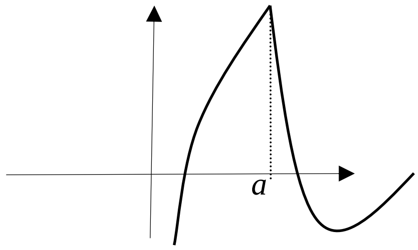
تمرین در کلاس

۱. در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.









۲. با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به دست آورید.

الف) $a = 3\ ,\ y = \sqrt{1+x}$

ب) $a = 0\ ,\ y = \dfrac{x}{|x|}$

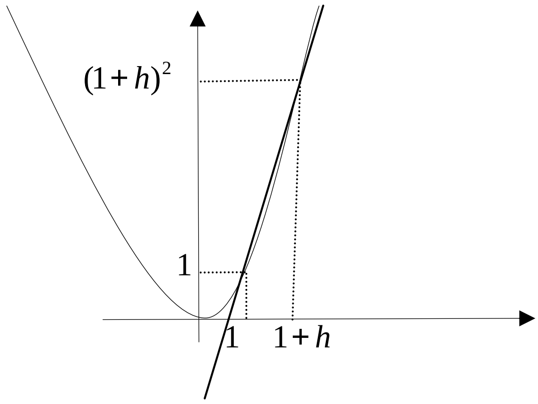
ج) $a = 2,\ y = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$

حل یک مسئله

چگونه می توانیم معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2$ در نقطه $(1,1)$ را به دست آوریم؟

با انجام مراحل زیر سعی کنید این مسئله را حل کنید.

۱) معادله خطی را که از این نقطه و یک نقطه نزدیک به آن که روی نمودار قرار دارد بنویسید.
یک نقطه نزدیک به $(1,1)$ روی نمودار این تابع را می توانید به شکل $(1+h,(1+h)^2)$ در نظر بگیرید.



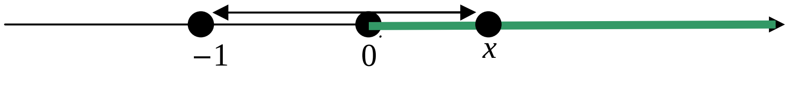
۲) اگر h به صفر نزدیک شود این خط به چه خطی نزدیک می شود؟ شیب این خط و عرض از مبدا این خط به چه اعدادی نزدیک می شوند؟

۳) معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x^2$ را در نقطه $(1,1)$ بنویسید.

با استفاده از این روش می توانید معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x^2$ را در نقاط دیگر نیز بیابید. آیا برای نمودار توابع دیگر نیز می توان معادله خط مماس بر نقاط آنها را یافت؟ در مورد چند تابع دیگر این مطلب را آزمایش کنید.

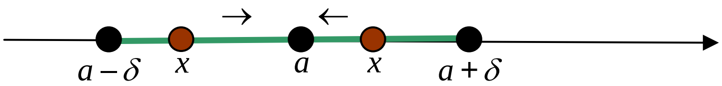
همسایگی های یک نقطه

آیا می توان از حد تابع $\sqrt{x}$ در نقطه ۱- صحبت کرد؟ شرط اصلی در بررسی حدیک تابع در یک نقطه مانند a آن است که بتوان از نقاط دامنه آن تابع به نقطه a نزدیک شد. اما دامنه تابع $\sqrt{x}$ بازه $[0\ ,\ \infty)$ است و نمی توان از نقاط این بازه به ۱- نزدیک شد.



منظور از نزدیک شدن مقدارهای یک متغیر به یک نقطه مانند a آن است که بتوان مقدارهایی برای متغیر قرار داد که فاصله آن تا a از هر عدد مثبت انتخاب شده ای کمتر شود.

برای آن که بتوان از داخل دامنه تابعی، به نقطه ای مانند a از دو طرف (راست و چپ) نزدیک شد، دامنه آن تابع باید شامل یک بازه به صورت $(a-\delta\ ,\ a+\delta)$ باشد. البته خود a لزومی ندارد در دامنه آن تابع باشد.



بازه های به صورت $(a-\delta\ ,\ a+\delta)$ را که δ عددی مثبت است یک همسایگی a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می نامند.

شرط آن که بتوان از حد(دو طرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت گوییم تابع در اطراف a تعریف شده است.

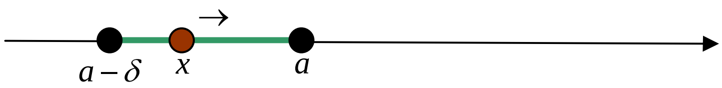
مثال: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف صفر و خود صفر تعریف شده است. زیرا در همسایگی $(-1\ ,\ 1)$ از صفر تعریف شده است.

مثال: تابع $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است اما در خود صفر تعریف نشده است زیرا دامنه تعریف آن یک همسایگی محذوف صفر، $(-1\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 1)$ ، است.

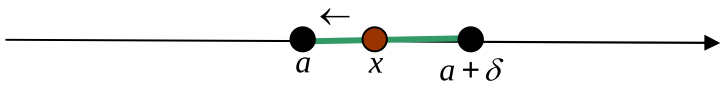
بحث در کلاس

آیا می توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{1-x^2}$ در نقطه ۱ صحبت کرد؟

برای بررسی حد چپ یک تابع f در نقطه ای مانند a، متغیر x (در دامنه f) باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه f باید شامل بازه ای به صورت $(a-\delta\ ,\ a)$ باشد. چنین بازه هایی را یک همسایگی چپ a نامیم و در این حالت گوییم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.



به طور مشابه، بازه های به صورت $(a\ ,\ a+\delta)$ را یک همسایگی راست a نامیم و اگر دامنه تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوییم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.

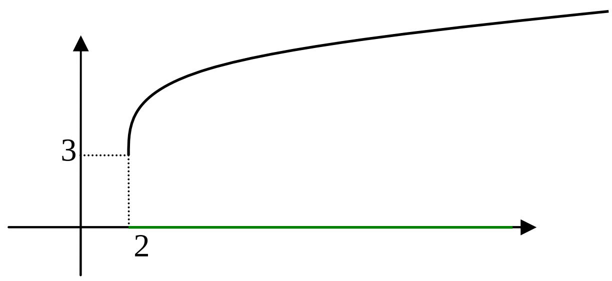


مثال: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در یک همسایگی چپ ۱ و در یک همسایگی راست ۱- تعریف شده است، اما دراطراف این دو نقطه تعریف شده نیست.

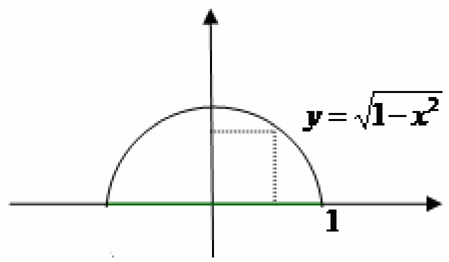
شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

به طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

تعریف شده است و می توانیم حد راست آن را در ۲ حساب کنیم که برابر ۳ است.



مثال: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف ۱ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی چپ ۱ تعریف شده است و می توانیم حد چپ آن را در ۱ حساب کنیم که برابر صفر است.



تمرین در کلاس

برای تابع $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$ به سوالات زیر جواب دهید.

۱. این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟
۲. این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است و در خود آن نقاط تعریف نشده است؟
۳. این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟
٤. این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟

بنا به قرارداد، اگر از حد تابعی مانند f در نقطه ای مانند a صحبت کنیم و f فقط در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، منظور همان حد راست f در a است، و اگر f فقط در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است.

مثال: منظور از حد تابع $\sqrt{x}$ در صفر همان حد راست $\sqrt{x}$ در صفر است و

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

مثال: برای تابع $\frac{1}{[x]-2}$، حد آن در نقطه ۲ همان حد چپ این تابع در نقطه ۲ است و

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{[x]-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{[x]-2}=-1$$

مسائل

۱) با رسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $a=0\ ,\ y=\dfrac{x^2-x}{x}$ ب) $a=-1\ ,\ y=\begin{cases} x^2+1 & x<-1 \\ x^3+3 & -1<x \end{cases}$

ج) $a=2\ ,\ y=x[x]$ د) $a=0\ ,\ y=\sqrt{1-x^2}$

ه) $a=1,\ y=\dfrac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2-1}$ و) $a=0\ ,\ y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

۲) با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد و حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

الف) $a=1/2\ ,\ y=[x]$ ب) $a=2\ ,\ y=\begin{cases} x^2+1 & x<2 \\ 6 & x=2 \\ -x^2+9 & 2<x \end{cases}$

ج) $a=2\ ,\ y=x-[x]$ د) $a=-3\ ,\ y=1-\sqrt{1-x}$

ج) $a=0\ ,\ y=\dfrac{x}{|x|}$

۳) اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آنها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آنها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آنها مساوی است.

٤) در هر یک از حالتهای زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

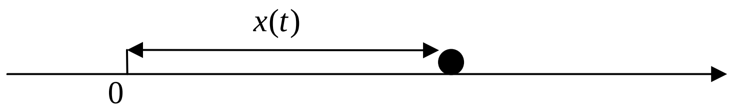
د) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

ه) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد راست داشته باشد.

و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۵) متحرکی روی محور x ها به گونه ای حرکت می کند که در هر لحظه t ($0 \le t$) در مکان $x(t)$ قرار دارد و $x(t) = t^2 - t$.



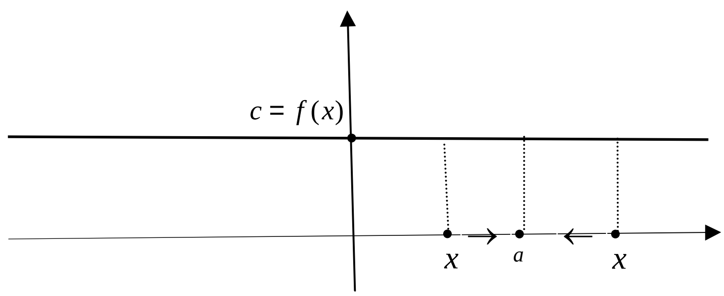
با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و ولی سرعت لحظه ای آن را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

٦) معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x$ را در نقطه $(1\,,\,-1)$ به دست آورید.

قضایای حد توابع

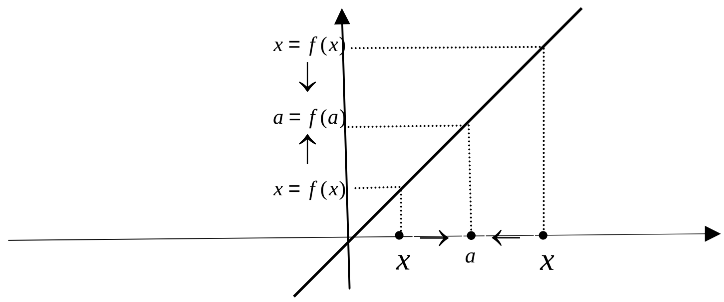
حد برخی توابع خاص را به سادگی می توان به دست آورد.

مثال: تابع ثابت $f(x) = c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.



$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال: تابع $f(x)=x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a برابر a است.



$$\lim_{x\to a} x = a$$

بحث در کلاس

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در اطراف نقطه ای مانند a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، آیا تابع $f(x)+g(x)$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می تواند باشد؟ در مورد تابع $f(x)g(x)$ چه می توان گفت؟

فعالیت

۱. دو تابع $f(x)=3+2x$ و $g(x)=2-x$ را در نظر بگیرید و توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ را بسازید.

۲. برای بررسی حد این چهار تابع در صفر جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$-0/1$ $\quad -0/01$ $\quad -0/001$ $\rightarrow$ $\qquad\qquad$ $\leftarrow$ $0/001$ $\quad 0/01$ $\quad 0/1$
$f(x)$	$\rightarrow \; ? \; \leftarrow$
$g(x)$	$\rightarrow \; ? \; \leftarrow$
$f(x)+g(x)$	$\rightarrow \; ? \; \leftarrow$
$f(x)g(x)$	$\rightarrow \; ? \; \leftarrow$

۳. حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صفر چیست؟

٤. حد توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ در صفر چیست؟

۵. چه ارتباطی بین حد توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ و حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ می یابید؟

اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x)=K$ با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L و مقدارهای $g(x)$ به K نزدیک می شوند، پس مقدارهای $f(x)+g(x)$ به $L+K$ نزدیک می شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)+g(x)$ در a حد دارد و حد آن $L+K$ است. همچنین مقدارهای $f(x)g(x)$ به LK نزدیک می شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)g(x)$ در $x \to a$ حد دارد و حد آن LK است. به عبارت دیگر قضایای زیر برقرارند.

اگر دو تابع f و g در دامنه مشترکی تعریف شده باشند و در نقطه ای مانند a حد داشته باشند، آنگاه توابع $f+g$ و fg نیز در نقطه a حد دارند و

$$\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x)\,.\,\lim_{x \to a} g(x)$$

مثال: تابع $y=x$ در هر نقطه ای مانند a حد دارد و حد آن a است بنابراین تابع $y=x^2$ نیز در a حد دارد و حد آن a^2 است، زیرا

$$\lim_{x\to a} x^2=(\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x)=a.a=a^2$$

مثال: دو تابع $y=x$ و $y=x^2$ در هر عددی مانند a حد دارند و حد آنها به ترتیب a و a^2 است، بنابراین

$$\lim_{x \to a}(x^2+x)=\lim_{x \to a} x^2+\lim_{x \to a} x=a^2+a$$

مثال: حد تابع $y=(x^2+\frac{x}{2})(x-1)$ را در 4 به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to 4}(x^2+\frac{x}{2})(x-1)=\lim_{x\to 4}(x^2+\frac{x}{2}).\lim_{x\to 4}(x-1)=(4^2+\frac{4}{2})(4-1)=54$$

تمرین در کلاس

۱. با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

۲. ثابت کنید برای هر تابع چندجمله ای مانند $P(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$$

در بالا دیدیم که توابع چندجمله ای به گونه ای هستند که در هر نقطه حد دارند و حد آنها همان مقدار تابع در آن نقاط است. بسیاری از توابع مهمی که تا اینجا دیده ایم این خاصیت را دارند که بدون اثبات برخی از آنها را در اینجا بیان می کنیم. با رسم نمودار این توابع می توانید درستی حدهای زیر را توجیه کنید.

$$\lim_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a}$$

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad ، \quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

$$\lim_{x\to a}b^x=b^a$$

تذکر: در بالا نقطه a باید در دامنه توابع مورد نظر باشند.

بحث در کلاس

اگر تابع $f(x)$ در اطراف نقطه ای مانند a تعریف شده باشد و در a حد داشته باشد، آیا تابع $\frac{1}{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می تواند باشد؟

فعالیت

۱. تابع $f(x)=1-2x$ را در نظر بگیرید. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در ۲ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$1/9$	$1/99$	$1/999$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$2/001$	$2/01$	$2/1$
$f(x)$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			
$\frac{1}{f(x)}$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			

۲. حدهای دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در ۲ چه مقدار هستند و چه رابطه ای با هم دارند؟

۳. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در $\frac{1}{2}$ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$0/4$	$0/49$	$0/499$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$0/501$	$0/51$	$0/6$
$f(x)$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			
$\frac{1}{f(x)}$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			

٤. آیا حدی برای $\frac{1}{f(x)}$ می یابید؟ دلیل آن را چه می دانید؟

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ به معنای آن است که با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می شوند. اگر $L=0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ از لحاظ قدرمطلق در حال افزایش هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی شوند و تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد نخواهد داشت . اما اگر $L\neq 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ به عدد $\frac{1}{L}$ نزدیک می شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقدار انتخاب شده ای می تواند کمتر شود. پس در این حالت تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\frac{1}{L}$ است. بنابراین می توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$ آنگاه $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

مثال: حد تابع $y = \dfrac{1}{\sin x}$ را در $\dfrac{\pi}{4}$ حساب می کنیم.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

مثال: حد تابع $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ را در $x = -1$ حساب می کنیم.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to -1} x\frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \to -1} x \,.\, \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2+1} = -1 \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to -1} x^2+1} = -\frac{1}{2}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ را در π بررسی می کنیم. از آنجا که $\lim\limits_{x \to \pi} 1+\cos x = 0$ تابع $f(x)$ در $x \to \pi$ حد ندارد.

تمرین در کلاس

۱ – – حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y = \cos^2 x + x^2$ در π ب) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در 4

ج) $y = \dfrac{x \sin x}{(1+x)\cos x}$ در π د) $y = 2^{x+1} - 3^{2x}$ در 2

۲– اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x)-g(x)$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x \to a} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

۳– اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ نشان دهید تابع $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

محاسبه حد در توابع کسری

در محاسبه بسیاری از حدهای مهم به حالتی برخورد می کنیم که تابع به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ است و حد صورت و مخرج در نقطه مورد نظر صفر است. قضایای بالا هیچ کمکی برای محاسبه حد این گونه توابع نمی کنند. این حالت را اصطلاحاً حالت $\frac{0}{0}$ می نامند. برای محاسبه حد این گونه توابع (در صورت وجود) یکی از راه ها، ساده سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه حد طبق قضایای بالا امکانپذیر باشد.

مثال: حد تابع $y=\frac{\sin 2x}{\sin x}$ را در 0 بررسی می کنیم.

در حالت $\frac{0}{0}$ قرار داریم و لازم است ابتدا یک ساده سازی از کسر به عمل آوریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$$

مثال: حد تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ را در 1 بررسی می کنیم.

محاسبه این حد به طور مستقیم امکانپذیر نیست، ولی می توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم و سپس حد را حساب کنیم.

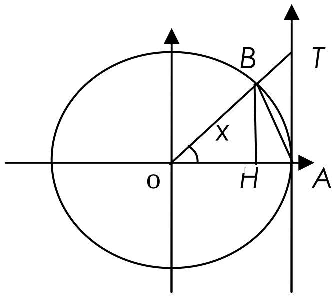
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$$

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله ای باشند و در محاسبه حد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه a در حالت $\frac{0}{0}$ باشیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$. یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخشپذیرند و می توان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ساده کرد و عامل $x-a$ را از صورت و مخرج حذف کرد. با ادامه این عملیات در صورت وجود حد، می توان آن را محاسبه کرد.

یکی از حدهای مهم حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در 0 است. این حد نیز از حالات $\frac{0}{0}$ است ولی نمی توان با ساده کردن معمولی این کسر، حد آن را حساب کرد. قبلا با محاسبات تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ در نزدیکی های صفر حدس زده ایم که حد آن ۱ است ولی در اینجا می خواهیم استدلال دقیقتری برای آن بیابیم.

فعالیت

شکل زیر یک دایره مثلثاتی را نشان می دهد.



۱- مساحت های مثلثهای OBA و OTA و قطاع OBA از دایره را بر حسب نسبتهای مثلثاتی زاویه (مثبت) x (بر حسب رادیان) و خود زاویه x محاسبه کنید و نشان دهید:

$$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x$$

۲- نتیجه بگیرید برای مقدارهای کوچک و مثبت x داریم:

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

۳- با نزیک شدن x به صفر $\frac{1}{\cos x}$ به چه عددی نزدیک می شود؟ با نزیک شدن x به صفر برای تابع $\frac{x}{\sin x}$ چه نتیجه ای می توان گرفت؟ حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر چقدر است؟

٤- با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ حد چپ آن در صفر چیست؟ حد این تابع در صفر چقدر است؟

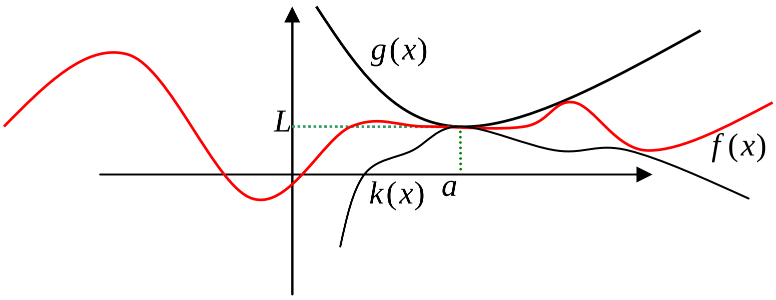
۵- نتیجه بگیرید $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

مثال: حد تابع $y=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ را در 0 حساب می کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$$

در فعالیت بالا برای یافتن حد تابع $\frac{x}{\sin x}$ دیدیم که این تابع بین تابع $\frac{1}{\cos x}$ و تابع ثابت ۱ قرار گرفته است و این دو تابع در صفر حد یکسان ۱ دارند. از این نکته نتیجه می شود که تابع $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ناچار با نزدیک شدن x به صفر باید به ۱ نزدیک شود. این مطلب در حالت کلی هم درست است که آن را قضیه افشردگی می نامند.

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلا $k(x)\le f(x)\le g(x)$، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می شود $\lim_{x\to a}f(x)=L$.



مثال: حد تابع $x\cos\frac{1}{x}$ را در صفر حساب می کنیم.

از آنجا که $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ برای مقدارهای مثبت x داریم $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ و برای مقدارهای منفی x داریم $x\le x\cos\frac{1}{x}\le -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$

مسائل

۱- حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{2-\sqrt{-x}}$ ب) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ ج) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2}$

د) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x+2}{x^2-1}$ ه) $\lim\limits_{x\to 0} x^2[x]$ و) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

ز) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ ح) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}$ ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

۲- ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ معادل با آن است که $\lim\limits_{x\to a} (f(x)-L)=0$.

۳- با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|=0$ با یکدیگر معادلند.

٤- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده اند و هیچکدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

٦- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با اینحال fg در a حد داشته باشد.

۷- آیا تابع $\sin\frac{1}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x\sin\frac{1}{x}$ در صفر اظهارنظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح دهید.

پیوستگی توابع

فعالیت

۱. نمودار دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ را رسم کنید.

۲. حد این دو تابع در ۲ را به دست آورید.

۳. این دو تابع چه شباهتها و چه تفاوتهایی دارند و چرا حد آنها در ۲ با هم مساوی است؟

٤. حد این دو تابع در ۲ با مقدارهای این دو تابع در ۲ چه رابطه ای دارند؟

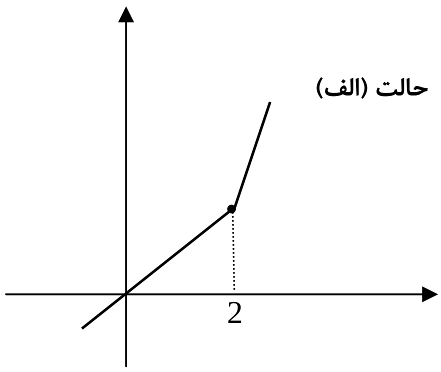
٥. یکسانی حد f و مقدار f در ۲ و تفاوت حد g و مقدار g در ۲، موجب پیدایش کدام ویژگی در نمودار این دو تابع شده است.

در بررسی حد یک تابع در یک نقطه، لزومی ندارد تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تابع در آن نقطه تعریف شده باشد در صورت وجود حد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

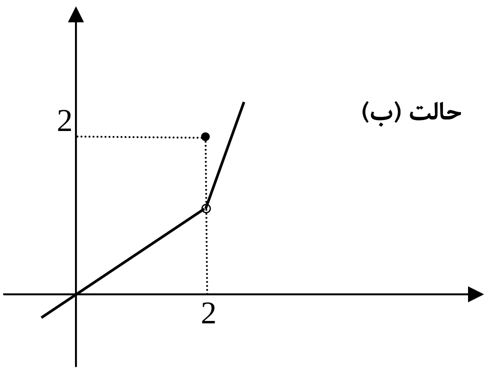
الف) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

ب) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه ست.

برای مثال، این دو حالت در نمودار توابع زیر نشان داده شده اند.



$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x & x<2\\ 1 & x=2\\ 2x-3 & 2<x\end{cases}$$



$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x & x<2\\ 2 & x=2\\ 2x-3 & 2<x\end{cases}$$

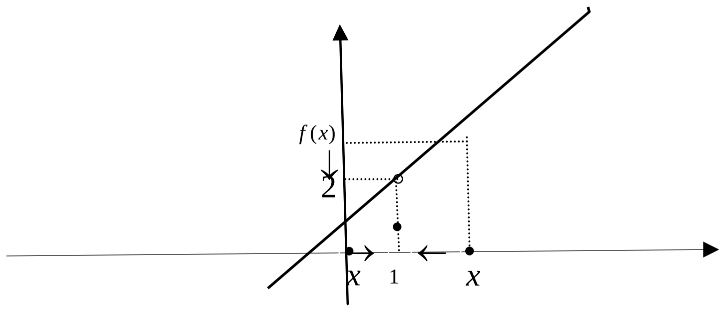
همانطور که مشاهده می شود در حالت (الف) نمودار تابع یکپارچه و به هم پیوسته است ولی در حالت (ب) نمودار تابع از هم گسسته شده است. علت این موضوع آن است که در حالت (الف) حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در همان نقطه است ولی در حالت (ب) در نقطه ۱ حد تابع و مقدار تابع مساوی نیستند. به همین خاطر تعریف زیر بنا می شود.

اگر a نقط ای از دامنه تابع f باشد و حداقل در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد گوییم f در a پیوسته است هرگاه حد f در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

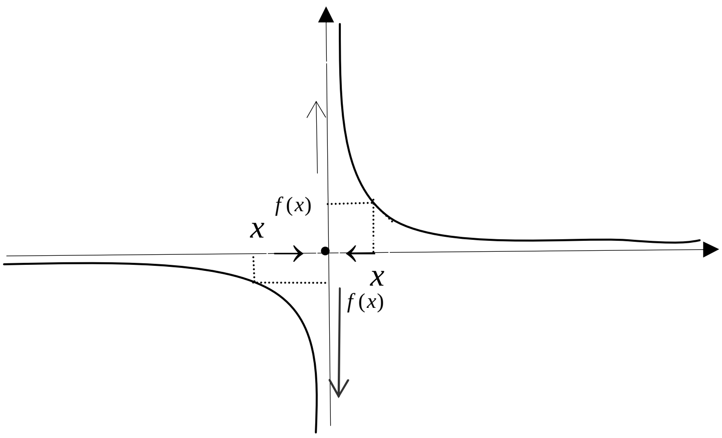
مثال: توابع چندجمله ای در هر نقطه ای پیوسته اند، زیرا قبلا دیدیم که برای هر تابع چندجمله ای $P(x)$ در هر نقطه a داریم: $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.

مثال: توابع $\sqrt[k]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, b^x **در همه نقاط دامنه خود پیوسته اند.**

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ در ۱ پیوسته نیست، زیرا حد آن در ۱ برابر ۲ است ولی $f(1)=1$.



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در صفر پیوسته نیست، زیرا این تابع در صفر حد ندارد.



مثال: تابع $y=\sqrt{x-1}$ در نقطه ۱ پیوسته است، زیرا حد این تابع در نقطه ۱ که همان حد راست آن در نقطه ۱ است برابر مقدار تابع در ۱ است.

آیا تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی توانیم صحبت کنیم چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس

با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آنها را در نقطه داده شد بررسی کنید.

۱) $y=\frac{1}{x}$ در نقطه دلخواه $a \neq 0$

۲) $y=\begin{cases} x^2+x & x \leq 0 \\ x^2-x & 0<x \end{cases}$ در نقطه $a=0$

۳) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ x+1 & -1<x \end{cases}$ در نقطه $a=-1$

٤) $y=[x]$ با دامنه $[-1,1]$ در نقطه $a=-1$

اگر تابعی در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می نامند.

مثال: توابع چندجمله ای و $\sqrt[k]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, b^x در همه نقاط دامنه خود پیوسته اند و در نتیجه توابعی پیوسته اند.

مثال: تابع $y=\frac{1}{x}$ پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه خود پیوسته است(صفر در دامنه تعریف آن نیست).

مثال: تابع $[x]$ روی $\mathbb{R}$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، اما اگر این تابع را با دامنه $[0,2]$ در نظر بگیریم در نقطه صفر پیوسته است و در نقاط ۱ و ۲ همچنان ناپیوسته است.

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای نامنفی باشد و تابع $\sqrt{f(x)}$ را بسازیم و $f(x)$ در نقطه ای مانند a حدی برابر L داشته باشد، آیا تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ و آیا حد آن $\sqrt{L}$ می شود؟

$\sqrt{t}$ تابعی پیوسته است و اگر مقدارهای t به عددی مانند L نزدیک شوند مقدار $\sqrt{t}$ نیز به $\sqrt{L}$ نزدیک می شوند. با نزدیک شدن مقدارهای x به a، مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می شوند، در نتیجه مقدارهای $\sqrt{f(x)}$ به $\sqrt{L}$ نزدیک می شوند، یعنی تابع $\sqrt{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\sqrt{L}$ است. به عبارت دیگر:

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای نامنفی باشدو در نقطه ای مانند a حد داشته باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$.

علت درستی رابطه بالا پیوستگی تابع $\sqrt{x}$ است و مطلب بالا برای هر تابع پیوسته دیگری هم برقرار است. اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $g(f(x))$ قابل انجام باشد(برد f مشمول دامنه g باشد)، آنگاه تابع $g(f(x))$ نیز در a حد دارد و حد آن $g(L)$ است. به عبارت دیگر با شرایط بالا داریم:

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))$$

مثال: حد تابع $y=\sqrt{\sin x}$ را در $x\to\frac{\pi}{6}$ می یابیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin x}=\sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: حد تابع $\sin\sqrt{\pi^2-x^2}$ را در نقطه $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ می یابیم.

$$\lim_{x\to a}\sin\sqrt{\pi^2-x^2}=\sin(\lim_{x\to a}\sqrt{\pi^2-x^2})=\sin\sqrt{\lim_{x\to a}(\pi^2-x^2)}$$
$$=\sin\sqrt{\pi^2-\frac{8\pi^2}{9}}=\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مسائل

۱- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنیدکدامیک از آنها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته اند؟

الف) $y=|x-1|+2$ ب) $y=x+[x]$ ج) $y=x+|x|$ د) $y=\begin{cases}x(x-1) & x\le 1\\ -x+2 & 1<x\end{cases}$

۲- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y=\begin{cases}x^2-ax+1 & x\le 1\\ x-2a & 1<x\end{cases}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

٤- نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته است ولی در صفر حد دارد.

٥- نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته است و در این نقاط حد ندارد.

٦- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته ای باشند، نشان دهید توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته اند. در مورد پیوستگی $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ چه می توان گفت؟

٧- اگر f و g توابع پیوسته ای باشند در مورد پیوستگی تابع $g\circ f$ چه می توان گفت؟