فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

نگاه کلی به فصل چهارم

اهداف کلی

- آشنایی با مفهوم حد توابع در یک نقطه و تعریف نیمه رسمی از حد تابع و نماد ریاضی آن
- آشنایی با مفاهیم حد چپ و راست تابع در یک نقطه و نماد ریاضی آن
- آشنایی با مفهوم همسایگی های یک نقطه و نقش آن در حد تابع
- آشنایی با قضایای حد توابع در جمع و ضرب و تقسیم توابع
- آشنایی با چگونگی محاسبه حد توابع کسری به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$
- آشنایی با محاسبه حد $\frac{\sin x}{x}$ در $x=0$ و قضیه افشردگی
- آشنایی با پیوستگی توابع و تعریف رسمی آن
- آشنایی با حد تابع $g\circ f$ وقتی که g پیوسته است.

آموزش فصل چهارم

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

- در مباحثات مربوط به مفاهیم طرح شده، وارد شوند و دیدگاههای خود را بیان کنند.
- حد توابع را از طریق جدول و نمودار توابع حدس بزنند و درستی حدس خود را توضیح دهند.
- مفهوم حد تابع را در چند مثال از طریق جدول و نمودار تابع توضیح دهند.
- مثالهایی از توابعی که حد ندارند را ارائه کنند.
- بین مفهوم حد تابع و مقدار تابع تفاوت قائل شوند و در چند مثال این تفاوت را نشان دهند.
- نماد ریاضی حد را به درستی بکار برند و بخوانند.
- شرایطی را که می توانند در آن شرایط از حد یک تابع صحبت کنند بشناسند و قبل از محاسبه حد یک تابع آن شرایط را بررسی کنند.
- حد چپ و راست توابع را توضیح دهند و رابطه آن را با حد تابع مشخص کنند.
- نماد ریاضی حد چپ و راست توابع را به درستی بکار برند و بخوانند.
- شرایطی را که می توانند در آن شرایط از حد چپ یا راست یک تابع صحبت کنند بشناسند و قبل از محاسبه حد، آن شرایط را بررسی کنند.
- همسایگی های یک نقطه را بشناسند و نقش همسایگی ها را در حد یک تابع توضیح دهند.

آموزش فصل چهارم

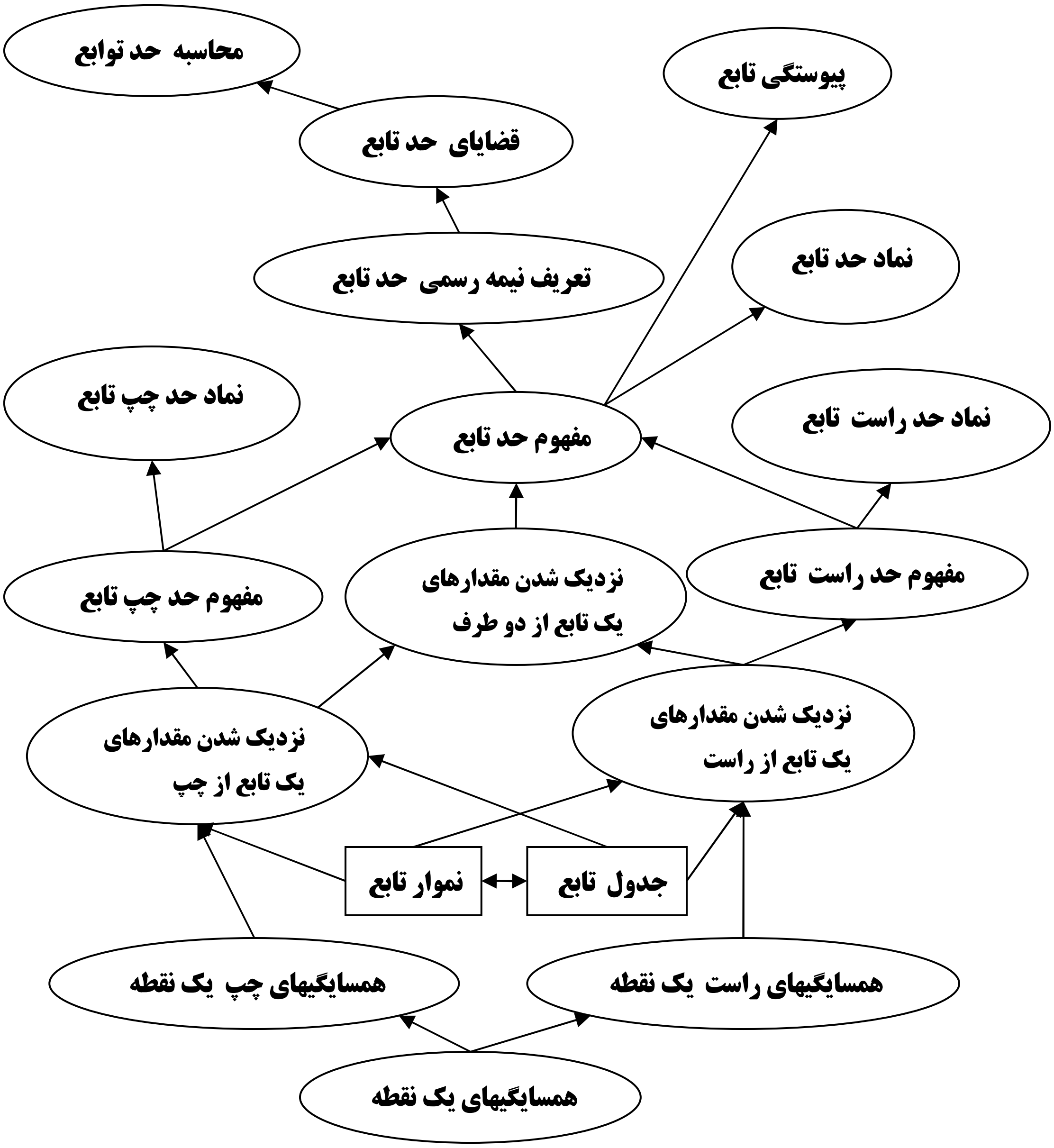
- قضایای حد مجموع و ضرب و تقسیم توابع را بیان کنند و از آنها در محاسبه حد توابع استفاده کنند.
- حد توابع خاص چندجمله ای و رادیکالی و مثلثاتی و نمایی را بشناسند و بیان کنند.
- در مواردی که برای محاسبه حد یک تابع نمی توانند از قضایای حد استفاده کنند از اعمال ساده سازی استفاده کنند و حد را محاسبه کنند.
- حد خاص $\frac{\sin x}{x}$ را در $x=0$ بشناسند و استدلال آن را به طریق هندسی بیان کنند.
- قضیه افشردگی را توضیح دهند و از آن در محاسبه حدها استفاده کنند.
- مفهوم پیوستگی توابع را به عنوان حالت خاصی که حد تابع و مقدار تابع یکی هستند بشناسند و توابع مهم پیوسته را ارائه کنند.
- مثالهایی از توابع ناپیوسته بسازند و چند تابع ناپیوسته مهم ارائه کنند.
- قضیه حد تابع $g \circ f$ را که g تابعی پیوسته است را بشناسند و در حالتهای خاص از آن در محاسبه حد توابع استفاده کنند.

پیشنیازها

- آشنایی با تابع و جدول تابع و نمودار تابع
- آشنایی با فاصله بین دو عدد
- آشنایی با مفهوم تغییر و نزدیک شدن مقدارهای یک تابع به یک عدد خاص

آموزش فصل چهارم

طرح کلی مفاهیم فصل چهارم



مستطیل ها نشان دهنده مفاهیم قبلی و بیضی ها نشان دهنده مفاهیم جدید هستند.

آموزش فصل چهارم

طرح آموزشی فصل چهارم

هدف اولیه این فصل آموزش مفهوم حد است. این مفهوم دارای چند لایه از پیچیدگی است که در فعالیتها و ایجاد تجربه های متعدد یکی یکی باز خواهند شد. برای مفهوم حد سه لایه پیچیدگی به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

۱. نزدیک شدن مقدارهای تابع به یک عدد خاص وقتی که متغیر به عدد خاصی نزدیک می شود.
۲. نزدیک شدن مقدارهای تابع به یک عدد خاص وقتی که متغیر به عدد خاصی از طرف چپ یا راست نزدیک می شود.
۳. دامنه تابع و همسایگی ها و همسایگی های چپ و راست نقطه

توجه داشته باشید که نزدیک شدن متغیر به نقطه، مفهوم خاصی نیست زیرا مقدار متغیر دست ما است و ما خود آن را تعیین می کنیم در حالی که مقدارهای تابع مربوط به تابع است و بررسی خاص لازم دارد.

اگرچه برای تعریف منطقی و دقیق حد تابع، مفهوم همسایگی لازم است ولی توجه داشته باشید که رسیدن به تعریف رسمی و نهایی مورد نظر، آخرین گام آموزش است نه اولین گام . ابتدا باید تجربیاتی را برای دانش آموز فراهم کنیم تا مفهوم در ذهن دانش آموز جای درست خود را پیدا کند و نهایتا تعریف رسمی را ارائه کنیم. بنابراین تعجب نکنید که ما از حد تابع صحبت خواهیم کرد بدون آن که در مورد دامنه تابع و همسایگی های نقطه صحبتی کرده باشیم.

اولین لایه پیچیدگی مفهوم حد، مفهوم نزدیک شدن مقدارهای تابع به یک عدد است. بنابراین در این قسمت ما اشاره ای به دامنه و همسایگی و نزدیک شدن متغیر از چپ و راست نخواهیم کرد و مثالهای مورد بحث دامنه ای آسان و بدون مشکل خواهند داشت. در این قسمت دانش آموز مفهوم حد را به طور ابتدایی، بدون توجه به پیچیدگی های اضافی آن خواهد شناخت و تعریفی از حد، هر چند ناقص، به دست خواهد آورد.

پس از عبور از این قسمت، لایه پیچیدگی نزدیک شدن متغیر به عدد از چپ یا راست مطرح می شود و طی تجربیاتی حد راست و چپ تابع معرفی می شود و تعریفی از آن ارائه می شود که شبیه همان تعریف حد تابع است.

در آخرین قسمت، لایه پیچیدگی امکان نزدیک شدن متغیر به عدد مطرح می شود که مفهوم همسایگی را وارد می کند. پس از باز شدن این لایه ها است که تعریف نهایی و دقیقتر از حد قابل ارائه می شود. البته تعریف نهایی مورد نظر ما از حد تعریف دقیق منطقی آن نیست و تعریف در همان زبان طبیعی ارائه می شود و انتظار نمی رود دانش آموزان با استفاده از این تعریف استدلال

منطقی ارائه کنند ولی انتظار داریم که با این تعریف، درک عمیقتری از مفهوم حد داشته باشند و بتوانند در این محدوده توضیحات و تشریحاتی از حد توابع داشته باشند و حد توابع را به درستی حدس بزنند.

پس از درک مفهوم حد، توانایی محاسباتی حد توابع از اهداف این فصل خواهند بود. در وهله اول این توانایی با دانستن حدهای آشنا و قضایای حد جمع و ضرب و تقسیم توابع به دست می آید. برخی از حدها از طریق قضایای گفته شده قابل محاسبه نیستند که آنها را حالات مبهم می نامند. در اینجا حالات مبهم به طور رسمی مورد بحث قرار نگرفته اند و فقط در چند مثال ساده که با روش ساده سازی می توان حد را محاسبه کرد، مورد بحث واقع شده اند.

حد خاص $\frac{\sin x}{x}$ در $x = 0$ به خاطر کاربرد آن در محاسبه مشتق توابع مثلثاتی مستقیما مورد بحث و استدلال قرار گرفته است و به طور شهودی از قضیه افشردگی استفاده شده است. به همین بهانه صورت کلی قضیه افشردگی بیان شده است تا بتوان در حل مسائل از آن استفاه کرد.

مفهوم پیوستگی در آخرین بخش ارائه شده است. توابع پیوسته به عنوان توابعی استثنایی معرفی شده اند که در آنها حد تابع و مقدار تابع یکی هستند. این ویژگی موجبات اتصال و یکپارچگی در نمودار تابع می شود که در مثالها ارائه شده است.

در این بخش قضیه مهم حد ترکیب تابع پیوسته و یک تابع دیگر نیز آورده شده است که در محاسبه حد توابع بسیار مهم است.

بخش اول: حد توابع، حد چپ و راست، همسایگی های یک نقطه

اهداف بخش

- ایجاد مباحثه نسبت به مفهوم حد در یک مسئله واقعی
- آشنایی با مفهوم حد توابع در یک نقطه
- تعریف نیمه رسمی از حد تابع و نماد ریاضی آن
- آشنایی با توابعی که حد ندارند.
- آشنایی با مفاهیم حد چپ و راست تابع در یک نقطه و نماد ریاضی آن و رابطه آن با حد تابع
- آشنایی با مفهوم همسایگی های یک نقطه و نقش آن در حد تابع

آموزش فصل چهارم

نگاه کلی به بخش

روش عمومی کتاب برای ایجاد تجربه نسبت به مفاهیم، انجام فعالیت هایی نسبت به یک مسئله ملموس است که مفهوم مورد نظر به آسانی در ذهن متجسم شود و جای خود را نسبت به مفاهیمی که قبلا دانش آموز با آنها آشنا است، پیدا کند.

در مورد مفهوم نزدیک شدن مقدارهای تابع، مسئله ای واقعی و ملموس طرح شده است که حد به طور واقعی در آن رخ می دهد. این مسئله مربوط به محاسبه سرعت لحظه ای یک سنگ در حال سقوط است. البته به طور استاندارد این مسئله در مورد محاسبه مشتق توابع بکار می رود، ولی لزومی ندارد که حرفی از مشتق به میان آوریم و دانش آموز نیز فعلا چیزی به نام مشتق نمی شناسد تا مفاهیم را با هم مخلوط کند. در اصل جایگاه اصلی حد در چنین مسائلی است و عمدا این مسئله انتخاب شده است تا ویژگی های زیر برقرار باشند.

۱. مفهوم مورد نظر در یک زمینه واقعی رخ دهد و دیده شود و مصنوعی نباشد.
۲. تابعی که برای حدگیری به دست می آید در نقطه مورد نظر تعریف شده نباشد.
۳. مفهوم نزدیک شدن معنای روشنی داشته باشد.

از آنجا که مفاهیم سرعت متوسط و سرعت لحظه ای را زمینه اصلی آموزش قرار داده ایم لازم بود که مطمئن شویم دانش آموزان این مفاهیم را به درستی درک کرده اند. به همین خاطر ابتدا مباحثه ای را بنا کرده ایم که از یک طرف سنت مباحثه قویتر شود و از طرف دیگر مفاهیم پایه ای به درستی آموخته شوند. سپس در طی یک فعالیت به حل مسئله اصلی پرداخته می شود که در آن عملا با حد گیری مسئله حل می شود. نهایتا با چند بار تمرین دیگر در حدگیری، مفهوم حد رسما ارائه می شود.

حد نداشتن برای توابع نیز بخشی از درک مفهوم حد است که مستقلا در فعالیت جداگانه ای به آن پرداخته شده است. مفاهیم حد چپ و راست به عنوان حالت خاصی از حدگیری طرح می شود که همزمان ابزاری برای تشخیص وجود حد یا نبود حد بکار می رود.

شرایط لازم برای امکان حدگیری از نکات مهم در درک مفهوم حد است که به دامنه تابع و همسایگی های نقطه مربوط می شود و در آخر این بخش طرح می شود.

ورود به مطلب

برای یک ورود مناسب به مفهوم حد نیازمند موقعیتی هستیم که در آن مفهوم حد حضور داشته باشد و به روشنی دیده شود. طرح چنین موقعیتی بستگی به دانش و تجربه مخاطب دانش آموزی دارد و در هر جایی ممکن است مسئله خاصی مناسب باشد که تشخیص آن با معلم است. در

آموزش فصل چهارم

کتاب مسئله یافتن سرعت لحظه ای یک سنگ در حال سقوط پیشنهاد شده است که حد مورد نظر همان سرعت لحظه ای است که دانش آموز می پذیرد عددی مشخص است که در ماشین سرعت شمار آن را نشان می دهد. تابعی که مقدارهای آن به سرعت لحظه ای نزدیک می شود سرعتهای متوسط است که در بازه های زمانی متفاوت محاسبه می شوند.

برای ورود به مفهوم حدهای چپ و راست، پیشنهاد می شود از محاسبه حد یک تابع شروع کنیم که در طرف چپ و راست نقطه رفتارهای متفاوت دارد. این تابع نهایتا حد ندارد اگرچه با محدود شدن در قسمت چپ یا راست نقطه حدهایی به دست می آوریم. در این قسمت مفهوم خیلی جدیدی نداریم و فقط یکی از پیچیدگیهای مربوط به درک مفهوم حد باز می شود.

برای ورود به مفهوم همسایگی پیشنهاد شده است که از مسئله امکان نزدیک شدن متغیر به یک نقطه که پایه مفهوم حد است شروع شود. در زمینه این مسئله است که مفهوم همسایگی های یک نقطه و اهمیت آن قابل درک خواهد بود.

فعالیت آموزشی

اولن لایه پیچیدگی حد، مفهوم نزدیک شدن مقدارهای تابع است وقتی که متغیر به نقطه خاصی نزدیک می شود. در اولین بخش این فصل فرآیندی طراحی شده است که مفهوم نزدیک شدن مقدارهای تابع آموزش داده شود.

این بخش با ایجاد یک موقعیت و طرح یک مسئله در آن شروع می شود. در موقعیت ایجاد شده مفاهیم حرکت و سرعت وجود دارد و ممکن است دانش آموزان تجربه کافی و اطلاعات کافی نسبت به آن نداشته باشند. برای آن که وابسته به دانش فیزیکی دانش آموزان نباشیم، ابتدا بحثی را در بین معلم و دانش آموزان طراحی کرده ایم تا مطمئن باشیم دانش آموزان مفاهیم اساسی پیش نیازی را می دانند.

سپس به فعالیت اصلی می رسیم که در آن دانش آموزان مفهوم حد را تجربه می کنند. توجه داشته باشید تابعی که در این فعالیت به حد آن پرداخته می شود غیر از آن تابعی است که در ابتدای فصل ارائه شده است. همچنین توجه داشته باشید که در این مسئله محور جهت داری وجود ندارد و تابع داده شده، ارتفاع سنگ را از سطح زمین به دست می دهد که عددی مثبت است. در این مسئله باید طبق شکل فاصله ها را به دست آورد.

حل فعالیت اول

۱- $y(1) = 16 - 5\times1^2 = 11$، سنگ پس از یک ثانیه در ارتفاع ۱۱ متری از سطح زمین است.

۲- $y(1+h)=16-5\times(1+h)^2=11-5h^2-10h$.

۳- اگر h مثبت باشد سنگ در لحظه $1+h$ به زمین نزدیکتر است و مسافت طی شده بین این دو لحظه برابر است با $y(1)-y(1+h)=5h^2+10h$ و مدت زمان این حرکت h است. اما اگر h منفی باشد سنگ در لحظه 1 به زمین نزدیکتر است و مسافت طی شده بین این دو لحظه برابر است با $y(1+h)-y(1)=-5h^2-10h$ و مدت زمان این حرکت $-h$ است.

٤- در هر دو حالت h مثبت و منفی مسافت طی شده تقسیم بر زمان حرکت برابر است با

$$\frac{5h^2+10h}{h}=\frac{-5h^2-10h}{-h}=5h+10$$

۵- منفی بودن h به معنای آن است که $1+h$ لحظه ای قبل از لحظه 1 است.

٦-

h	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\rightarrow$	0	$\leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
سرعت متوسط	۹/۵	۹/۹۵	۹/۹۹۵	$\rightarrow$	10	$\leftarrow$	۱۰/۰۰۵	۱۰/۰۵	۱۰/۵

۷- سرعت متوسط به ۱۰ نزدیک می شود. این عدد سرعت لحظه ای سنگ در لحظه $t=1$ است.

پس از پایان این فعالیت مطالب آن جمعبندی می شود. به ویژه این نکته باید مورد تاکید قرار گیرد که در محاسبه تابع $g(h)=5h+10$ حق نداریم جای h صفر قرار دهیم و در همینجا است که مفهوم حد متولد می شود.

حل تمرین در کلاس اول

در این تمرین در کلاس، سه تابع داده شده اند که در غیر از نقطه ۱ مانند یکدیگرند. یکی در ۱ تعریف نشده و دیگری در ۱ مقداری دارد که غیر از حد تابع است و دیگری در ۱ مقداری دارد که همان حد تابع است. در این تمرین مفهوم نزدیک شدن مقدارهای تابع تمرین می شود و غیر مستقیم مشخص می شود که در حدگیری لزومی ندارد تابع در آن نقط تعریف شده باشد و در صورت تعریف شده بودن مقدار تابع در آن نقطه ارتباطی با حدگیری ندارد.

در قسمت بعدی این تمرین، حدس حد $\frac{\sin x}{x}$ آورده شده است که دانش آموز هیچ حدس مشخصی نسبت به آن ندارد و مقدار تابع در آن نقطه نیز تعریف نشده است. برای آن که کار مشکل نباشد مقدارهای تابع به شکل غیر مستقیم داده شده اند ولی در صورت داشتن وقت، مناسب است با استفاده از ماشین حساب عمل شود و نقاط دیگری نیز محاسبه شوند. به ویژه توجه

آموزش فصل چهارم

به این نکته ضروری است که در محاسبه تابع سینوس و سایر توابع مثلثاتی زاویه بر حسب رادیان است.

پس از کسب این تجربیات رسما مفهوم حد و نمادگذاری آن ارائه می شود. توجه داشته باشید که اگر بخواهیم دقیق باشیم برای معرفی نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ ابتدا باید یکتایی حد را ثابت کرده باشیم زیرا در غیر این صورت معلوم نیست این نماد کدامیک از حدهای تابع را نشان می دهد. ولی ما در این کتاب این مطلب را رسما بیان نمی کنیم و از حد تابع به گونه ای صحبت می کنیم که به طور ضمنی پذیرفته ایم حد یکتا است.

تعریف حد، ابتدا با همان درک شهودی اولیه ارائه می شود ولی سپس معنای حد به طور دقیقتری بیان می شود. پس از ارائه چند مثال از حد توابع و بکارگیری نماد ریاضی آن، برای درک دقیقتر حد باید مثالهای عدم وجود حد نیز مورد تجربه قرار گیرند.

بخش بعدی برای درک مفهومهای حد چپ و راست است که در ارتباط با چگونگی نزدیک شدن متغیربه نقطه است و در بررسی وجود حد و عدم وجود حد مورد استفاده قرار می گیرد.

حل فعالیت دوم

۱- جدول را رسم می کنیم.

۲- جدول نشان می دهد که مقادیر تابع از لحاظ قدرمطلق در حال بزرگ شدن است و به عدد خاصی نزدیک نمی شوند. نمودار نیز نشان می دهد با نزدیک شدن x به صفر $\frac{1}{x}$ از لحاظ قدرمطلق از هر عددی بزرگتر می شود.

پس از این فعالیت و جمعندی از حالت نبود حد و ارائه چند مثال در بخش بعدی زمینه برای ارائه مفهوم حد چپ و راست آماده می شود.

حل فعالیت سوم

۱- جدول را تکمیل می کنیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$x-[x]$	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow ? \leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱

۲- اگر x با مقادیر بزرگتر از ۱ به ۱ نزدیک شود مقدارهای تابع به صفر نزدیک می شوند. و اگر x با مقادیر کوچکتر از ۱ به ۱ نزدیک شود مقدارهای تابع به ۱ نزدیک می شوند. این دو عدد متفاوتند.

۳- از روی نمودار چگونگی نزدیک شدن $x-[x]$ به صفر و ۱ را وقتی x از راست و چپ به ۱ نزدیک می شود نشان می دهیم.

٤- این تابع در ۱ حد ندارد.

پس از این فعالیت مفاهیم حدهای چپ و راست و نمادهای ریاضی آن رسما ارائه می شوند و در یک شکل نمایش داده می شوند. پس از ارائه یک مثال، رابطه بین حدهای چپ و راست و حد تابع در یک قضیه بیان شده است.

حل تمرین در کلاس دوم

۱- نمودارها به اندازه کافی روشن هستند و می توان وجود یا عدم وجود حدهای چپ و راست را تشخیص داد.

۲- الف) برای تابع $\sqrt{1+x}$ با محاسبه آن (از ماشین حساب استفاده کنید) به ازای xهای نزدیک ۳ می توان روند تغییرات را مشاهده کرد و نتیجه گرفت حد برابر ۲ است.

ب) مقدارهای تابع $\frac{x}{|x|}$ در سمت چپ و راست صفر ثابت ۱- و ۱ است و تابع در نقطه صفر حد چپ ۱- و حد راست ۱ دارد.

ج) با رسم نمودار و از طریق جدول می توان مشاهده کرد که حد چپ و راست این تابع در نقطه ۲ برابر ۳ است.

پس از این قسمت مسئله ای طرح می شود که از یک طرف مفید و مهم بودن مفهوم حد را نشان می دهد و از طرف دیگر تجربه ای از مفهوم مشتق ایجاد می کند. انتظار نبوده است که دانش آموزان خودشان بتوانند این مسئله را حل کنند، بنابراین مراحل حل این مسئله ارائه شده است و جوابهای هر مرحله به شکل زیر است.

۱) معادله خط گذرنده از نقطه $(1,1)$ و $(1+h,(1+h)^2)$ به شکل زیر است. ابتدا شیب خط را به دست می آوریم.

$$m=\frac{(1+h)^2-1}{1+h-1}=\frac{h^2+2h}{h}=h+2$$

آموزش فصل چهارم

حال معادله خط را می نویسیم.

$$y-1=(h+2)(x-1) \Rightarrow y=(h+2)x-h-1$$

۲) با نزدیک شدن h به صفر این خط به خط مماس بر نمودار تابع $y=x^2$ در نقطه $(1,1)$ نزدیک می شود. شیب این خط $h+2$ است و به ۲ نزدیک می شود. عرض از مبدا این خط $-h-1$ است و به ۱- نزدیک می شود.

۳) خط مماس مورد نظر شیب ۲ و عرض از مبدا ۱- دارد و معادله آن $y=2x-1$ است.

پس از حل این مسئله یادآوری می شود که برای سایر نقاط و سایر توابع نیز می توان این روش را پیاده سازی کرد(به شرطی که بتوان حد توابع به دست آمده را حساب کرد).

در بخش بعدی به لایه پیچیدگی دامنه تابع و نقش آن در حدگیری پرداخته می شود. شروع بخش با طرح سوال از حدگیری یک تابع شروع می شود که امکان حدگیری برای آن وجود ندارد. تا اینجا تمامی توابع مورد بحث دامنه مناسبی داشتند و نزدیک شدن متغیر به نقطه بدون هیچ سوال و ابهامی قابل انجام بوده است. در این بخش است که با طرح توابع با دامنه های کوچکتر، نزدیک شدن متغیر به هر نقطه ای امکان پذیر نمی شود و باید در مورد شرایط نزدیک شدن متغیر به نقطه تفکر کرد. به دست آوردن این شرایط مشکل نیست و مفهومهای همسایگی و همسایگی محذوف و همسایگی چپ و راست قابل ارائه می شوند.

اکنون می توانیم از شرایط لازم برای حدگیری دو طرفه و حدگیری چپ یا راست صحبت کرد.

حل تمرین در کلاس سوم

ابتدا باید دامنه تعریف این تابع را مشخص کنیم که عبارت است از:

$$[-3,3]-\{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$$

۱- این تابع در یک همسایگی همه نقاط دامنه خود تعریف شده است.

۲- این تابع در یک همسایگی محذوف نقاط $\pm 1, 0$, ± 2 تعریف شده است و در خود این نقاط تعریف نشده است.

۳- این تابع در یک همسایگی چپ نقطه ۳ تعریف شده است و در هیچ همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.

٤- این تابع در یک همسایگی راست نقطه ۳- تعریف شده است و در هیچ همسایگی چپ این نقطه تعریف نشده است.

آموزش فصل چهارم

در آخر این بخش قراردادی آورده شده است که به ما کمک می کند در مورد حد توابع در نقاط گوناگون درونی و انتهایی بازه ها راحتتر صحبت کنیم و در بخشهای بعدی نیز در مورد پیوستگی توابع در نقاط درونی و انتهایی به شکل ساده تری صحبت کنیم. همچنین، این قرارداد با تعاریف کلیتر در فضاهای کلیتر هماهنگ تر است. طبق این قرارداد ما می توانیم از حد توابع در نقاط درونی و انتهایی به طور یکسان صحبت کنیم و همه آنها را حد تابع در آن نقاط بنامیم و با نماد یکسان نشان دهیم.

حل مسائل

۱- کلیه این توابع را می توان با رسم جدول و استفاده از ماشین حساب حدها را حدس زد.

الف) تابع قابل ساده شدن است و در صفر تعریف نشده است. حد برابر ۱- است.

ب) به خاطر تفاوت ضابطه تابع در چپ و راست نقطه، حدهای چپ و راست جداگانه محاسبه می شوند که هر دو حد برابر ۲ هستند.

ج) حدهای چپ و راست جداگانه بررسی شوند. حد چپ برابر ۲ و حد راست برابر ٤ می شود و تابع در نقطه ۲ حد ندارد.

د) با رسم جدول دیده می شود حد برابر ۱ است.

ه) با ساده سازی یا با تشکیل جدول دیده می شود که از چپ مقادیر تابع منفی هستند و از لحاظ قدرمطلق بسیار بزرگ می شوند و از راست مقادیر تابع مثبت هستند و در حال بزرگ شدن هستند. پس تابع در نقطه ۱ حد ندارد.نتیجه ساد سازی تابع به شکل زیر است.

برای $0<x<1$ داریم:

$$y=\frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2-1}=\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x-1|}}{(x+1)(x-1)}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\times\frac{\sqrt{|x-1|}}{-|x-1|}=-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\times\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$

برای $1<x$ داریم:

$$y=\frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{(x+1)(x-1)}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\times\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

و) حد این تابع مستقیما برای دانش آموزان قابل حدس نیست و فقط با تشکیل جدول (به کمک ماشن حساب) می توانند حد را حدس بزنند که برابر ۰/۵ است.

۲- نمودار تمامی توابع داده شده قابل رسم هستند و در کتاب نیز رسم شده اند.

الف) تابع در یک همسایگی نقطه داده شده ثابت صفر است و حد نیز صفر است.

ب) حد تابع در نقطه ۲ از چپ و راست ۵ است و مقدار تابع برابر ٦ است.

ج) حد چپ و راست متفاوت است. حد چپ برابر ۱ و حد راست برابر صفر است.

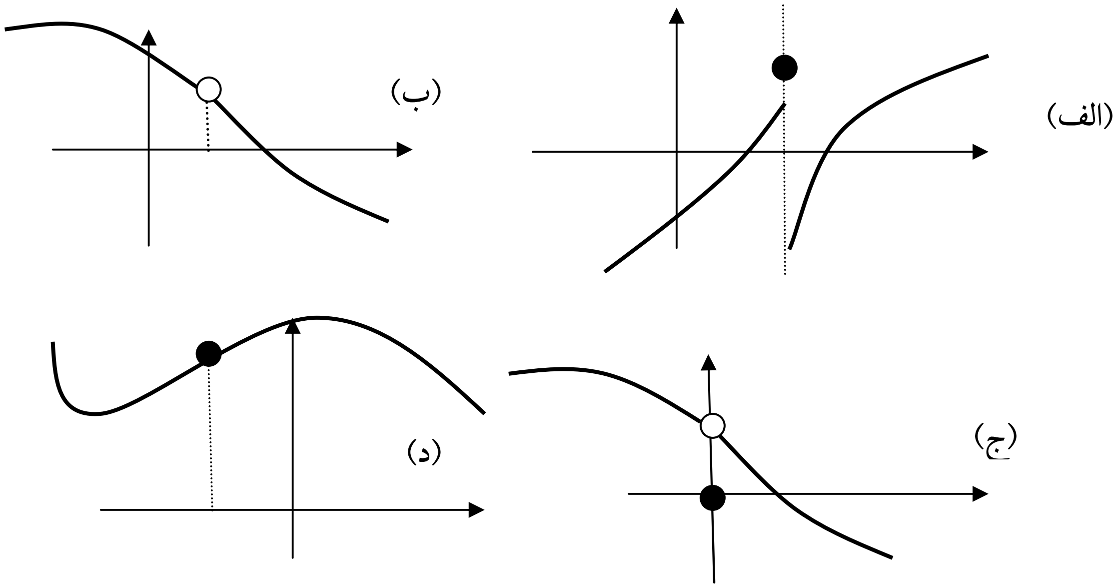
د) حد برابر ۲ است.

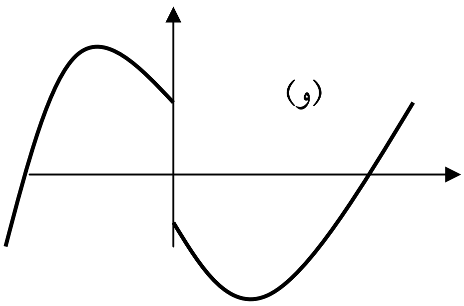
ه) تابع در سمت چپ صفر ثابت ۱- و در سمت راست صفر ثابت ۱ است. پس حد چپ برابر ۱- و حد راست برابر ۱ است.

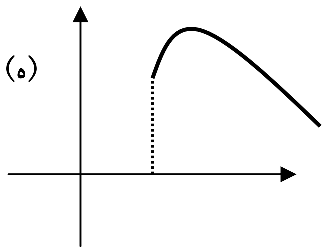
۳) می توانیم یک استدلال نموداری یا یک استدلال از طریق تشکیل جدول تغییرات این دو تابع ارائه کنیم. اگر نمودارهای این دو تابع را رسم کنیم در یک همسایگی نقطه a این دو نمودار بر هم منطبق می شود، پس چگونگی تغییرات این دو تابع در نزدیکیهای a دقیقا مانند یکدیگر است و از لحاظ وجود یا عدم وجود حد، هر دو مانند یکدیگر خواهند بود و در صورت وجود حد مقدار حد برای هر دو تابع مساوی است. از طریق جدول نیز استدلال مشابه است و در یک همسایگی a جدول دو تابع دقیقا با هم یکی هستند و می توانیم نتیجه بالا را مجددا بیان کنیم.

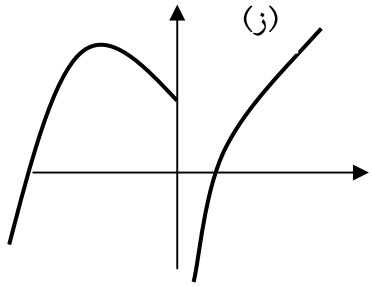
این مسئله نشان دهنده آن است که حدگیری مفهومی موضعی است و فقط به رفتار تابع در اطراف آن نقطه بستگی دارد. این مسئله همچنین باعث می شود که ما در محاسبه حد توابع اجازه داشته باشیم به جای یک تابع، تابع دیگری قرار دهیم که فقط در یک همسایگی آن نقطه با هم مساویند. توجه داشته باشید که در اینجا منظور ما توابع هم ارز نیستند و ما وارد چنین مفهومی نشده ایم و حق نداریم از آن استفاده کنیم.

٤) مثلا نمودار زیر را در نظر بگیرید. البته نمودارهای دیگری هم می توان رسم کرد

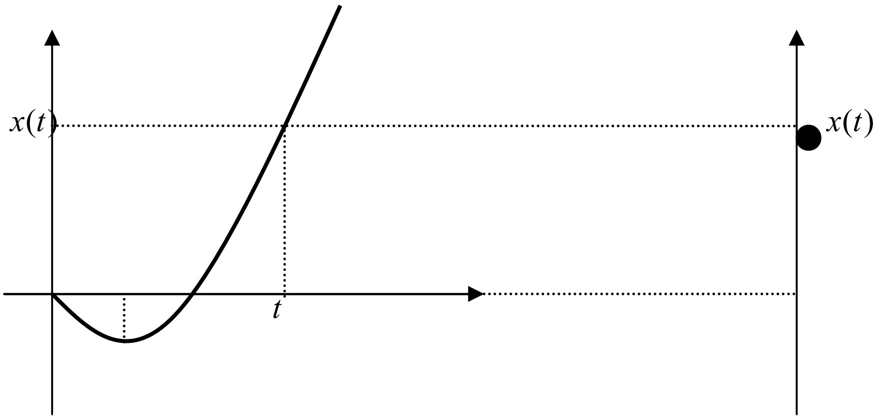








۵) نمودار تابع $x(t) = t^2 - t$ را در دامنه $[0,\infty)$ را رسم می کنیم.



نمودار نشان می دهد که در شروع حرکت، متحرک در مبدا است و رو به پایین حرکت می کند. و در لحظه $t = \frac{1}{2}$ به فاصله $\frac{1}{4}$ از مبدا (در جهت منفی) می رسد. پس از این لحظه متحرک رو به بالا حرکت می کند و در لحظه $t = 1$ به مبدا برمی گردد. با گذشتن از مبدا تا به آخر در همین جهت متحرک رو به بالا حرکت می کند.

برای محاسبه سرعت لحظه ای در لحظه $t = 2$ از همان روشی که در فعالیت اول کتاب انجام شد استفاده می کنیم. ابتدا سرعت متوسط بین دو لحظه ۲ و $2 + h$ را به صورت زیر حساب می کنیم.

$$\frac{x(2+h) - x(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - (2+h) - (2^2 - 2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 2 - h - 4 + 2}{h} = 3 + h$$

با نزدیک شدن h به صفر، سرعت متوسط به ۳ نزدیک می شود. پس سرعت در لحظه $t = 2$ برابر ۳ است. واحد سرعت به دست آمده بستگی به واحد مکان و واحد زمان دارد که در مسئله ذکری از آن نشده است.

٦) مشابه این مسئله در کتاب حل شده است و دقیقا مطابق با همان روش عمل می کنیم. یک نقطه نزدیک $(1,-1)$ به صورت $(1+h, 2(1+h)^2-3(2+h))$ است. شیب خط گذرنده از این دو نقطه عبارت است از:

$$m=\frac{2(1+h)^2-3(1+h)-(-1)}{1+h-1}=2h+1$$

معادله خط گذرنده از این دو نقطه به شکل زیر است.

$$y-(-1)=(2h+1)(x-1) \Rightarrow y=(2h+1)x-2h-2$$

با نزدیک شدن h به صفر خط بالا به خط $y=x-2$ نزدیک می شود.

ارزیابی یاد گیری

در این قسمت دانش آموزان باید بتوانند مفهوم حد را توضیح دهند و در زمینه های آشنا حضور مفهوم حد را تشخیص دهند. دانش آموزان قبل از بررسی وجود یا عدم وجود حد باید برقراری شرایط حدگیری را بررسی کنند. دانش آموزان باید بتوانند از طریق تشکیل جدول و رسم نمودار وجود یا عدم وجود حد (چپ و راست) را تشخیص دهند و مقدار حد را حدس بزنند.

دانش آموزان باید بتوانند مثالهایی با رسم نمودار ارائه کنند که حالتهای مختلف وجود یا عدم وجود حد را نشان دهد. دانش آموزان باید بتوانند از حد در محاسبه سرعت لحظه ای و خط مماس در مثالهای ساده استفاده کنند.

محدوده مطالب

در این قسمت فقط درک مفهوم حد مورد نظر است و انتظار نداریم دانش آموز تعریف منطقی حد را به دست آورد یا طبق تعریف منطقی حد، حد توابع را ثابت کند. ما فقط انتظار داریم دانش آموز از مفهوم حد درک شهودی درستی داشته باشد و بتواند با زبان طبیعی آن را توضیح دهد و با نمادهای ریاضی حد توابع را بنویسد. و انتظار داریم که مفهوم حد را در چند مثال از طریق جدول و نمودار تشریح کند و حد توابع را به درستی حدس بزند و به طور شهودی توضیح دهد.

نکات مهم

طبق قرارداد، در مواردی که تابعی فقط در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد، و از حد این تابع در a صحبت کنیم، خود به خود معنای آن، حد راست تابع در a خواهد

بود. به طور مشابه اگر تابع فقط در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، و از حد این تابع در a صحبت کنیم، خود به خود معنای آن، حد چپ تابع در a خواهد بود.

طبق قرار داد، معنای نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ بستگی به وضعیت دامنه f نسبت به a دارد. اگر دامنه f یک همسایگی محذوف a را در بر داشته باشد معنای این نماد همان حد دوطرفه f در a می باشد. اما اگر دامنه f فقط یک همسایگی راست a را در براشته باشد، معنای آن نماد، حد راست f در a است و اگر دامنه f فقط یک همسایگی چپ a را در براشته باشد، معنای آن نماد، حد چپ f در a است. اما اگر در هیچیک از حالات بالا نباشیم بکارگیری آن نماد بیمعنا است زیرا در چنین حالتی نمی توان از هیچگونه حدی از f در a سخن گفت.

علت چنین قراردادی در آن است که ما می خواهیم تا آنجا که ممکن است تعاریف و نمادگذاریهای ما از حد و پیوستگی با حالت کلی این مفاهیم در فضاهای کلیتر هماهنگ شود. و این قرارداد این هماهنگی را به وجود می آورد.

کاملا ممکن است در برخی کتابها قرارداد دیگری برای سخن از حد و پیوستگی بکار رفته باشد و در مطالعه هر کتابی ابتدا باید قراردادهای آن کتاب نسبت به تعاریف و نمادگذاریها را در نظر داشت. تفاوت در قراردادها امری مرسوم و معمول در ریاضیات است، اگرچه در سطح ریاضیات مدرسه ای زیاد رخ نمی دهد.

نکته مهم دیگر آن است که پرسش از حد توابع در هر نقطه ای همواره قابل طرح نیست و هرگاه از حد داشتن یا نداشتن یک تابع در یک نقطه پرسش می کنیم باید آن تابع حداقل در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد. در غیر این صورت گوییم پرسش از وجود یا عدم وجود حد بیمعنا است. برای مثال نمی گوییم حد $\lim_{x\to -1}\sqrt{x}$ موجود نیست بلکه می گوییم برای این تابع شرایط حدگیری برقرار نیست و این پرسش بیمعنا است.

بخش دوم: قضایای حد توابع، محاسبه حد در توابع کسری

اهداف بخش

- توانمند شدن در محاسبه حد توابع
- آشنایی با قضایای حد توابع در جمع و ضرب و تقسیم توابع
- آشنایی با حد توابع خاص چندجمله ای و رادیکالی و مثلثاتی و نمایی

آموزش فصل چهارم

- آشنایی با چگونگی محاسبه حد توابع کسری به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$
- آشنایی با محاسبه حد $\frac{\sin x}{x}$ در $x=0$ و قضیه افشردگی

نگاه کلی به بخش

در این بخش تعدادی از قضایای اساسی در محاسبه حد توابع مطرح شده است. به خاطر عدم ارائه تعریف منطقی حد، نمی توان هیچگونه اثبات رسمی ریاضی از این قضایا ارائه کرد. اما می توان از طریق تجربه کردن این قضایا و تکیه بر شهود دانش آموزان درستی این قضایا را پذیرفتنی کرد. روش اصلی کتاب در ارائه این قضایا به همین صورت بوده است که دانش آموزان در حالات خاص درستی قضایا را ببینند و شهود آنها درستی قضایا را در حالت کلی بپذیرد.

در این بخش دانش آموزان مجهز به قضایای اساسی محاسبه حد می شوند تا بتوانند حد توابع معمولی را حساب کنند. البته حالاتی هم هستند که از طریق این قضایا نمی توان حد را محاسبه کرد. فقط چند نمونه از این حالات را که با تکنیک ساده سازی و گویا کردن می توان حد را حساب کرد مورد بحث قرار گرفته است.

حد خاص $\frac{\sin x}{x}$ در $x=0$ با استدلالی دقیقتر و تکیه بر درک شهودی از قضیه افشردگی ارائه شده است. قضیه افشردگی نیز به طور شهودی برای کمک به حل مسائل و محاسبه حد آورده شده است.

ورود به مطلب

در این بخش اثباتهای رسمی مطرح نیستند و فقط درستی قضایا با روشهایی که متناسب مخاطب دانش آموزی باشند، باید پذیرفتنی شوند. هدف، درک درست قضایا و استفاده درست از قضایا در محاسبه حد توابع است. پیشنهاد کتاب دیدن درستی قضایا در مثالهای خاص است. این مثالها باید به گونه ای باشند که تعمیم آن به حالت کلی قابل قبول باشد.

برای آموزش ساده سازی کسرها برای محاسبه حد آنها می توان مسئله ای برای محاسبه حد این گونه توابع مطرح ساخت که مستقیما از طریق قضایا قابل محاسبه نباشد. سپس منتظر پیشنهادهای دانش آموزان برای حل این مسئله باشید و در نهایت با راهنمایی تکنیک ساده سازی کسرها را ارائه دهید.

در محاسبه حد $\frac{\sin x}{x}$ با توجه به نوع مخاطب می توانید شکلهای گوناگونی از ارائه را به دست آورید. یک پیشنهاد آن است که در دایره مثلثاتی $\sin x$ و x را با هم مقایسه کنید و در xهای

کوچک نسبت آنها را حدس بزنید. عاقبت با راهنمایی یا پیشنهادات دانش آموزان شبیه روش کتاب به نتیجه مطلوب برسید.

فعالیت آموزشی

این بخش با چند مثال که حد برخی توابع خاص را نشان می دهد، شروع می شود. برای ورود به قضیه حد مجموع و حاصلضرب دو تابع یک بحث در کلاس آورده شده است تا ابتد دانش آموزان در مورد این قضیه فکر کنند و حدسیه هایی بسازند. سپس به فعالیت چهارم این فصل می رسیم که در آن دانش آموزان از طریق مثال به قضیه حد مجموع و حاصلضرب دو تابع راهنمایی می شوند.

حل فعالیت چهارم

۱. $f(x)+g(x)=x+5$, $f(x)g(x)=-2x^2+x+6$

۲. جدول را با محاسبه مقدارهای توابع مورد نظر تکمیل می کنیم. در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده کنید.

۳. حد f در صفر برابر ۳ و حد g در صفر برابر ۲ است.

٤. حد $f+g$ در صفر برابر ۵ و حد fg در صفر برابر ٦ است.

۵. حد $f+g$ در صفر برابر مجموع حد f و حد g در صفر است و حد fg در صفر برابر حاصلضرب حد f در حد g در صفر است.

پس از این فعالیت دانش آموز آماده نتیجه گیری کلی است و یک استدلال شهودی برای قضیه حد مجموع و حاصلضرب دو تابع را می پذیرد. در کتاب این استدلال شهودی آمده است و قضایای مورد نظر بیان شده اند.

توجه داشته باشید که در صورت قضایا، دو تابع f و g باید در دامنه مشترکی تعریف شده باشند و در این دامنه مشترک دارای حد باشند. قبلا بر این موضوع تاکید نمی شد زیرا حدهای توابع مورد بحث حد دو طرفه بوده است و پیش فرض آن بوده است که دو تابع در یک همسایگی محذوف نقطه تعریف شده اند، اما در اینجا این تاکید لازم است زیرا ممکن است حد توابع مورد بحث حدهای یک طرفه باشند و با این که دو تابع می توانند در یک نقطه حد داشته باشند(یکی حد چپ باشد و دیگری حد راست) ممکن است دامنه مشترکی بین این دو تابع به وجود نیاید که حد مجموع یا حاصلضرب دو تابع معنادار باشد.

آموزش فصل چهارم

تمرین در کلاس چهارم

۱. به ازای $n=1$ درستی حدگیری قبلا بررسی شده است. فرض کنید تساوی به ازای $n=k$ برقرار باشد. درستی تساوی را به ازای $n=k+1$ به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to a} x^{k+1} = \lim_{x\to a} x^k x = \lim_{x\to a} x^k \lim_{x\to a} x = a^k a = a^{k+1}$$

۲. روی درجه چندجمله ایها استقرا می کنیم. ابتدا درستی تساوی را برای چندجمله ایهای که حداکثر درجه آنها صفر است بررسی می کنیم. این چندجمله ایها همان توابع ثابت هستند و قضیه برای آنها برقرار است. حال فرض کنید تساوی برای چندجمله ایهای با حداکثر درجه n برقرار است و درستی تساوی را برای چندجمله ایهای با حداکثر درجه $n+1$ به دست می آوریم. فرض کنید $Q(x)$ یک چندجمله ای با حداکثر درجه $n+1$ باشد. اگر درجه $Q(x)$ کمتر از $n+1$ باشد طبق فرض استقرا تساوی برقرار است. اگر درجه $Q(x)$ برابر $n+1$ باشد می توانیم بنویسیم $Q(x)=cx^{n+1}+P(x)$ که $P(x)$ یک چندجمله ای با درجه حداکثر n است و قضیه برای آن برقرار است. حال می توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} Q(x) = \lim_{x\to a} cx^{n+1} + P(x) = \lim_{x\to a} cx^{n+1} + \lim_{x\to a} P(x) = ca^{n+1} + P(a) = Q(a)$$

استقرا صحیح برای حل مسئله بالا استقرا قوی است. از آنجا که دانش آموزان ممکن است با استقرا قوی آشنا نباشند شیوه بیان استقرا به گونه ای بوده است تا بتوان از استقرا معمولی استفاده کرد. در صورت مشکل بودن این شیوه بیان، بهتر است به صورت مثالی عمل کنید.

پس از این تمرین در کلاس، حد چند تابع خاص که ویژگی آنها آن است که حد تابع و مقدار تابع یکی هستند بیان می شود. در مورد تابع $\sqrt[k]{x}$ توجه داشته باشید که در حالت k زوج دامنه تابع $[0,\infty)$ است و حد گیری در نقاط این بازه انجام می شود و حد در صفر همان حد راست است.

برای ورود به قضیه حد تقسیم دو تابع یک بحث در کلاس آمده است که باید با حدسیه سازی توسط دانش آموزان و آزمایش حدسیه در مثالهای خاص انجام شود. حالتی که حد مخرج صفر است ممکن است مود توجه دانش آموزان قرار نگیرد و معلم باید با راهنمایی غیر مستقیم این حالت را یادآور شود.

حل فعالیت پنجم

۱. جدول را با محاسبات ساده تکمیل می کنیم.

۲. حد f در نقطه ۲ عدد ۳- است و حد $\frac{1}{f}$ در نقطه ۲ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۳. جدول را با محاسبات ساده تکمیل می کنیم.

٤. برای $\frac{1}{f}$ در نقطه $\frac{1}{2}$ حدی وجود ندارد. زیرا مخرج به صفر نزدیک می شود و در نتیجه کسر $\frac{1}{f}$ بزرگ می شود و به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

پس از این فعالیت قضیه مربوط به حد تابع $\frac{1}{f}$ بیان می شود.

حل تمرین در کلاس پنجم

۱. الف) این مسئله طبق قضایای حد مجموع و حاصلضرب قابل محاسبه است.

$$\lim_{x\to\pi}\cos^2 x + x^2 = \lim_{x\to\pi}\cos^2 x + \lim_{x\to\pi} x^2 = \lim_{x\to a}\cos x\cos x + \lim_{x\to a} xx$$
$$= \lim_{x\to\pi}\cos x \lim_{x\to\pi}\cos x + \lim_{x\to\pi} x \lim_{x\to\pi} x = (-1)(-1) + \pi\pi = 1 + \pi^2$$

ب) با رسم جدول دیده می شود صورت به ۱ نزدیک می شود و مخرج به صفر نزدیک می شود و با تقسیم آن مقادیر بر هم کل کسر در حال بزرگ شدن است و حد ندارد.

ج) این مسئله طبق قضایای حد مجموع و حاصلضرب قابل محاسبه است. از آنجا که حد تقسیم دو تابع هنوز بیان نشده است ابتدا تابع را به صورت حاصلضرب درآورید و نتیجه حدگیری صفراست.

د) $\lim_{x\to 2} 2^{x+1} - 3^{2x} = \lim_{x\to 2} 22^x + \lim_{x\to 2}(-9^x) = 22^2 - 9^2 = -72$

۲.

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}(-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}(-1)g(x)$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

۳.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \times \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

در بخش بعدی به بررسی حدهایی می پردازیم که مستقیما توسط قضایایی که بیان کرده ایم قابل محاسبه نیستند. در این قسمت فقط تکنیک ساده سازی مورد توجه است و مثالهای مورد نظر همگی با ساده سازی و گویا کردن قابل محاسبه هستند.

یکی از حدهای مهم، حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در صفر است که مقدار آن قبلا توسط تشکیل جدول حدس زده ایم و در اینجا با تکنیک خاصی در طی فعالیت بعدی ثابت می شود.

آموزش فصل چهارم

حل فعالیت ششم

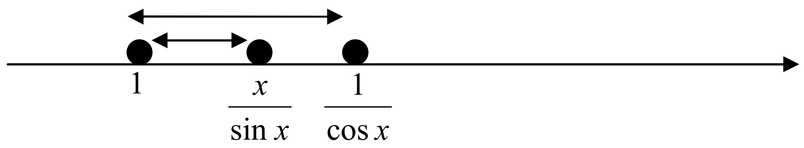
۱. مساحت مثلث $OBA = \frac{1}{2}\sin x$ ، مساحت مثلث $OTA = \frac{1}{2}\tan x$ ،
مساحت قطاع $OBA = \frac{1}{2}x$. با مقایسه بین این مساحتها دیده می شود مثلث OBA داخل قطاع OBA است و این قطاع داخل مثلث OTA است، پس

$$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x$$

۲. با ضرب در ۲ و تقسیم طرفین نامساوی بالا بر $\sin x$ که مقداری مثبت و ناصفر است(x کوچک و مثبت است) جهت نامساویها عوض نمی شوند و نتیجه می شود:

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

۳. با نزدیک شدن x به صفر طبق قضایا می دانیم $\frac{1}{\cos x}$ به ۱ نزدیک می شود. با توجه به نامساویهای بالا با رسم شکلی مانند زیر می توان نتیجه گرفت که نزدیک شدن $\frac{1}{\cos x}$ به ۱ باعث می شود $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ۱ نزدیک شود.



نتیجه آن است که با نزدیک شدن x به صفر با مقادیر مثبت مقدار $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ۱ نزدیک می شود یعنی حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر برابر ۱ است.

٤. با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ نمودار آن در چپ و راست صفر مانند یکدیگر است. پس حد چپ و راست آن در صفر مانند یکدیگر است. به طور جبری نیز می توان گفت داریم:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{-x}{\sin(-x)}$$

بنابراین با نزدیک شدن x به صفر با مقادیر مثبت، سمت چپ به ۱ نزدیک می شود اما سمت راست نیز همین تابع است که x با مقادیر منفی به صفر نزدیک می شود، یعنی حد چپ $\frac{x}{\sin x}$ در صفر نیز برابر ۱ است.

۵. با توجه به ناصفر بودن حد $\frac{x}{\sin x}$ در $x = 0$ با استفاده از قضیه تقسیم نتیجه می شود تابع $\frac{\sin x}{x}$ نیز در $x = 0$ حد ۱ دارد.

آموزش فصل چهارم

در این فعالیت، غیر مستقیم حالت خاصی از قضیه افشردگی استفاده شده است که برای بالا بردن توانایی دانش آموزان در محاسبه حد، صورت قضیه افشردگی به همراه یک شکل برای توجیه درستی قضیه آورده شد است.

حل مسائل

۱. الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2=4$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+\cdots+x+1)=n$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}1-(\frac{\sin x}{x})^2=1-(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2=1-1=0$

د) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+2}{x-1}=2$

درحل مسئله بالا، چون می دانیم چندجمله ای صورت به ازای $x=-1$ صفر می شود بنابراین بر $x+1$ بخش پذیر است. حال با عمل تقسیم یا تجزیه و ایجاد عامل $x+1$ می توانیم تجزیه صورت را انجام دهیم.

ه) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}1+\cos x=2$

و) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=0\times 1=0$

ز) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2}=\sqrt{2}$

در مسئله بالا x نزدیک π است پس $\sin\frac{x}{2}$ مقادیر مثبت دارد و داریم $\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2}$

ح)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-(\cos x+\sin x)=-\sqrt{2}$$

۲. با فرض $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=0$$

با فرض $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$ داریم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)=\lim_{x\to a}(f(x)-L)+\lim_{x\to a}L=0+L=L$$

۳. ایده شهودی حد، نزدیک شدن مقدارهای یک تابع به یک عدد خاص است. به این نکته نیز باید توجه کنیم که کوچک شدن یک عدد معادل کوچک شدن قدرمطلق آن عدد است. پس اگر مقادیر $f(x)$ کوچک شوند مقادیر $|f(x)|$ نیز کوچک می شوند و بر عکس. این به معنای آن است که $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ معادل با آن است که $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.

٤. اگر $f+g$ حد داشته باشدتابع $(f+g)-f$ نیز باید حد داشته باشد، اما این تابع همان تابع g است و طبق فرض حد ندارد.

٥. مثلا تابع $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ هر دو در صفر حد ندارند ولی مجموع آنها که تابع ثابت ۱ است در صفر حد دارد.

٦. این حالت فقط زمانی می تواند رخ دهد که حد تابع f در نقطه a صفر باشد زیرا در غیر این صورت با استدلالی شبیه مسئله (٤) می توان ثابت کرد g حتما حد دارد. با کمی بررسی حالات ممکن می توان قرار داد $f(x) = x - a$ و $g(x) = \frac{1}{x-a}$.

٧. چون دامنه تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{0\}$ است این تابع در اطراف صفر تعریف شده است. اگر x را از راست به صفر نزدیک کنیم، $\frac{1}{x}$ تمامی مقدارهای بازه $[1,\infty)$ را اختیار می کند. تابع سینوس روی بازه $[1,\infty)$ بینهایت بار بالا و پایین می رود بنابراین $\sin\frac{1}{x}$ مرتبا در حال بالا و پایین رفتن است و به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

برای اثبات درستی نامساوی توجه داریم که مقدارهای تابع سینوس در بازه $[-1,1]$ قرار دارد.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

از نامساوی بالا نتیجه می شود $-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$ و طبق قضیه افشردگی چو ن طرفین نامساوی در صفر حد صفر دارند تابع وسطی نیز در صفر حد صفر دارد.

ارزیابی یادگیری

در این قسمت دانش آموزان باید بتوانند شرایط بکارگیری قضایای محاسبه حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع را بشناسند و از این قضایا در محاسبه حد توابع استفاده کنند. همچنین جاهایی که این قضایا را نمی توانند بکار برند تشخیص دهند و با استفاده از ساده سازی (در مثالهای معمولی) محاسبه حد را انجام دهند.

آموزش فصل چهارم

محدوده مطالب

هدف این بخش توانمند کردن دانش آموزان در محاسبه حدهای معمولی است و قصدی برای محاسبه حدهای پیچیده نیست. همچنین ما وارد مفهوم توابع هم ارز نمی شویم و حق نداریم از این مفهوم برای محاسبه حد توابع استفاده کنیم.

در این کتاب رسما وارد مفهوم تعویض متغیر برای محاسبه حد توابع نشده ایم ولی به طور غیر رسمی در حدگیری در نقطه صفر، از این که متغیر به جای x بتواند $\frac{x}{2}$ باشد استفاده کرده ایم. در فصل بعدی نیز از این نکته که در حدگیری در نقطه صفر، متغیر به جای x می تواند ax هم باشد استفاده کرده ایم. مثلا داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5$$

در صورت بروز سوال در مورد درستی این عمل، از مفهوم شهودی حد استفاده کنید که وقتی x به صفر نزدیک می شود، $5x$ نیز به صفر نزدیک می شود و در نتیجه $\frac{\sin 5x}{5x}$ به ۱ نزدیک می شود.

نکات مهم

در بکارگیری قضایا در محاسبه حد توابع، باید دقت شود که شرایط قضیه به درستی رعایت شده باشد، در غیر این صورت ممکن است نتایج غلطی به بار آید. مثلا در قضایای حد مجموع و حاصلضرب توابع لازم است که دوتابع f و g در دامنه مشترکی تعریف شده باشند و در این دامنه مشترک در نقطه ای مانند a حد داشته باشند، در این صورت حق داریم بگوییم $f+g$ نیز در نقطه a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

اگر شرایط بالا را رعایت نکنیم ممکن است بنویسیم:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}+\sqrt{-x})=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0+0=0$$

در بالا تابع $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$ فقط در یک نقطه تعریف شده است و شرایط حد گیری به سمت هیچ نقطه ی را ندارد و تساوی بالا بیمعنا است. دلیل این اشتباه در آن است که دو تابع $y_1=\sqrt{x}$ و $y_2=\sqrt{-x}$ در دامنه مشترکی تعریف نشده اند که در آن دامنه حد این دو تابع موجود باشند. حد این دو تابع در دامنه های جداگانه ای است و اشتراک این دامنه ها هیچ همسایگی چپ یا راستی از صفر را در بر ندارد.

آموزش فصل چهارم

در تعریف و بکارگیری مفهوم توابع هم ارز بی دقتی هایی وجود دارد که ممکن است به نتایج غلط بیانجامد. مفهوم هم ارزی توابع در این کتاب نیامده است ولی برای رفع بی دقتی ها از این مفهوم تعاریف آن را برای شما مرور می کنیم.

دو تابع f و g که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده اند را در حوالی a هم ارز (مرتبه اول) نامیم هر گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$$

در این مفهوم مرتبه ای از هم ارزی هم وجود دارد که در اینجا برابر ۱ است. به طور کلی دو تابع f و g (که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده اند) در حوالی a هم ارز مرتبه kام نامیم هر گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^k}=0$$

بنابراین آنچه که به عنوان هم ارزی دو تابع مشهور است در واقع هم ارزی مرتبه اول است. در بین توابع مشتق پذیر هم ارزی مرتبه k دو تابع در حوالی یک نقطه a به معنای آن است که دو تابع در a مقدارهای مساوی دارند و مشتقهای آنها تا مرتبه kام در نقطه a با هم مساوی است.

در حل مسائل و محاسبه حدها گفته می شود که می توان از هم ارزهای تابع استفاده کرد ولی معلوم نیست که هم ارز مرتبه چندم یک تابع جواب درست می دهد. استفاده از هم ارز مرتبه اول ممکن است جواب نادرست بدهد. مثلا تابع ثابت ۱ و تابع $\cos x$ در حوالی صفر هم ارز مرتبه اول هستند ولی در محاسبه حد زیر جایگزینی آنها نتیجه غلطی به بار می آورد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1 \quad \text{(نادرست)}$$

البته اگر از هم ارز مرتبه دوم تابع $\cos x$ استفاده کنیم، نتیجه درستی به دست می آید. هم ارز مرتبه دوم $\cos x$ در حوالی صفر تابع $1-\frac{x^2}{2}$ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-(1-\frac{x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{(درست)}$$

بخش سوم: پیوستگی توابع

اهداف بخش

- درک مفهوم پیوستگی
- آشنایی با تعریف رسمی از پیوستگی
- آشنایی با توابع پیوسته مهم
- آشنایی با حد ترکیب یک تابع پیوسته با یک تابع دارای حد

نگاه کلی به بخش

این بخش با فعالیتی آغاز می شود که در آن دانش آموزان دو تابع تقریبا یکسان را از لحاظ نموداری و از لحاظ یکسانی حد تابع و مقدار تابع با هم مقایسه می کنند. در این مقایسه باید گسستگی نمودار یک تابع و متصل بودن نمودار دیگری با این خاصیت که در اولی حد تابع با مقدار تابع یکی نیست ولی در دومی یکی هست متناظر هم قرار گیرند و از این تناظر مناسب بودن تعریف پیوستگی در یک نقطه توجیه شود.

بنا به تعریف، پیوستگی تابع در یک نقطه به معنای مساوی بودن حد تابع و مقدار تابع در آن نقطه است. بنابراین شرط لازم برای سخن گفتن از پیوستگی در یک نقطه آن است که اولا آن نقطه در دامنه تابع باشد، ثانیا بتوان از حد تابع در آن نقطه صحبت کرد، یعنی تابع حداقل در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد. باید توجه داشته باشید که با این تعریف، مفهوم پیوستگی تابع در نقاط انتهایی هم تعریف شده است. طبق این تعریف اگر تابع در یک نقطه و فقط یک همسایگی راست آن نقطه تعریف شده باشد، حد تابع در این نقطه همان حد راست تابع در این نقطه است، پس اگر حد راست تابع در این نقطه و مقدار تابع در این نقطه مساوی شود، تابع در این نقطه پیوسته خواهد بود.

مفهوم پیوستگی کلی یک تابع به صورت پیوستگی در همه نقاط دامنه تابع تعریف می شود. به ویژه برای تابعی با دامنه $[a,b]$، پیوستگی آن به معنای پیوستگی در نقاط درونی و پیوستگی در نقاط انتهایی a و b است و پیوستگی در این نقاط طبق تعریفی است که در بالا ارائه شده است.

آموزش فصل چهارم

ورود به مطلب

ایده پیوستگی شهودی در ذهن دانش آموزان وجود دارد. کاری که ما باید انجام دهیم آن است که بگوییم این ایده با شرط یکسانی حد تابع و مقدار تابع یکی است. یک روش آن است که در چند مثال ببینیم که نبود این شرط در نمودار تابع گسستگی ایجاد می کند و بودن این شرط در نمودار تابع، اتصال برقرار می کند. روش کتاب بر همین اساس طراحی شده است تا تعریف پیوستگی قابل قبول باشد.

یک روش دیگر آن است که پیوستگی تابع در یک نقطه را با این شرط پیوند دهید که نمو کوچک در متغیر حول آن نقطه موجب نمو کوچک در مقدار تابع می شود و در چند مثال درستی این پیوند را بررسی کنید. سپس این شرط را به صورت حد تابع برابر مقدار تابع تفسیر کنید.

پس از تعریف، حالات خاص نقاط انتهایی که در این تعریف مستتر است جداگانه بررسی کنید.

فعالیت آموزشی

این بخش با فعالیتی شروع می شود که در آن دانش آموزان بین گسستگی در نمودار تابع و عدم تساوی حد تابع و مقدار تابع تناظر برقرار می کنند تا تعریف پیوستگی برای آنها موجه باشد.

حل فعالیت هفتم

۱. نمودار این دو تابع را رسم می کنیم که در تابع g در نقطه ۲ گسستگی وجود دارد.
۲. حد هر دو تابع در نقطه ۲ برابر ۳ است.
۳. این دو تابع در نقطه ۲ با هم متفاوتند ولی درسایر نقاط با هم مساویند. چون این دو تابع در یک همسایگی محذوف ۲ با هم مساوی هستند حد آنها در نقطه ۲ با هم مساوی است.
٤. درتابع f حد تابع با مقدار تابع مساوی است، اما درتابع g حد تابع با مقدار تابع مساوی نیست.
۵. نمودار g گسسته است ولی نمودار f متصل است.

پس از این فعالیت مفهوم پیوستگی، جمعبندی و به طور رسمی ارائه می شود. توجه داشته باشید که تعریف ارائه شده کلی است و مفهوم پیوستگی در نقاط انتهایی بازه ها را هم در بر دارد. به همین خاطر در مثالهای ارائه شده این نکته تصریح شده است.

آموزش فصل چهارم

حل تمرین در کلاس ششم

۱. تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در هر نقطه $a\neq 0$ پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} x}=\frac{1}{a}=f(a)$$

۲. این تابع در صفر پیوسته است، زیرا حد چپ و راست آن در صفر برابر صفر است که همان مقدار تابع در صفر است.

۳. این تابع در صفر پیوسته نیست زیرا حد چپ و راست آن در صفر متفاوت است و حد ندارد.

٤. تابع $[x]$ با دامنه $[-1,1]$ در نقطه ۱- پیوسته است زیرا حد آن در ۱- همان حد راست است و حد تابع و مقدار تابع مساوی هستند.

پس از این تمرین تعریف توابع پیوسته ارائه می شود که توابعی هستند که در همه نقاط دامنه خود پیوسته باشند. پس از چند مثال به قضیه مربوط به ترکیب توابع پیوسته و توابع حد دار پرداخته می شود. ابتدا حالت خاص تابع پیوسته $\sqrt{x}$ توضیح داده می شود و سپس قضیه در حالت کلی بیان می شود.

حل مسائل

۱. الف) تابع $y=|x-1|+2$ پیوسته است و با استفاده از قضایا می توان در هر نقطه حد آن را حساب کرد و دید که با مقدار تابع مساوی است.

ب) تابع $y=x+[x]$ در همه نقاط غیر از نقاط صحیح پیوسته است. حد این تابع در نقاط صحیح وجود ندارد (جمع یک تابع دارای حد با تابعی که حد ندارد) و در نقاط دیگر حد تابع برابر مقدار تابع است.

ج) تابع $y=x+|x|$ در همه نقاط پیوسته است.

د) این تابع در نقاط غیر از ۱ پیوسته است و در نقطه ۱ حد چپ و راست متفاوت دارد و حد ندارد و پیوسته نیست.

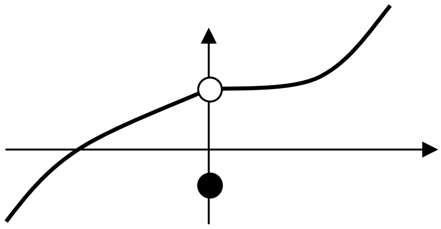
۲. این تابع در همه نقاط غیر از ۱ پیوسته است و برای آن که پیوسته شود باید در ۱ نیز پیوسته باشد. در درجه اول باید در این نقطه حد داشته باشد. حد چپ تابع در نقطه ۱ برابر $2-a$ و حد راست تابع در نقطه ۱ برابر $1-2a$ است. برای تساوی این دو حد باید داشته باشیم:

$$2-a=1-2a \;\Rightarrow\; a=-1$$

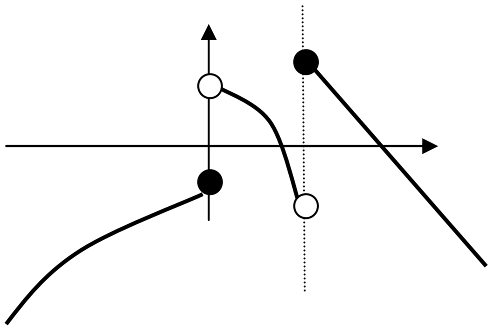
به ازای $a=-1$ حد تابع در ۱ با مقدار تابع نیز مساوی خواهد بود.

۳. در درجه اول تابع باید در صفر حد داشته باشد. اما حد راست تابع برابر a و حد چپ تابع برابر $-a$ است. برای تساوی حد چپ و راست باید داشته باشیم $a=0$. اما در این صورت حد تابع با مقدار تابع مساوی نخواهد بود. بنابراین این تابع به ازای هیچ مقداری از a نمی تواند پیوسته شود.

٤. مثلا می توانید نمودار زیر را رسم کنید.



٥. مثلا می توانید نمودار زیر را رسم کنید.



٦. با استفاده از قضایای حد مجموع و حاصل ضرب می توان پیوستگی مجموع و حاصل ضرب دو تابع پیوسته را به دست آورد.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)$$
$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$$

این محاسبه برای تقسیم دو تابع پیوسته نیز برقرار است به شرط آن که مخرج صفر نباشد. اما نقاطی که مخرج صفر است در دامنه تقسیم دو تابع قرار ندارد، بنابراین تقسیم دو تابع پیوسته تابعی پیوسته است. البته دامنه تقسیم دو تابع ممکن است کوچکتر شده باشد.

٧. ترکیب دو تابع پیوسته، (اگر ترکیب قابل انجام باشد) تابعی پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to a}g(f(x))=g(\lim_{x\to a}f(x))=g(f(a))=(g\circ f)(a)$$

ارزیابی یادگیری

دانش آموزان باید بتوانند شرایط بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه را تشخیص دهند و نسبت به پیوستگی یا ناپیوستگی توابع در نقاط داده شده بررسیهای لازم را انجام دهند. دانش آموزان باید توابع پیوسته مهم و اصلی را بشناسند و از طریق آنها سایر توابع پیوسته را تشخیص دهند.

محدوده مطالب

توابعی که در این کتاب از نقطه نظر حد و پیوستگی مورد بحث قرار گرفته اند آنهایی هستند که دامنه آنها به صورت یک بازه یا اجتماعی از بازه ها هستند. البته مفاهیم حد و پیوستگی برای توابعی با دامنه های کلیتر نیز قابل بیان است ولی در محدوده این کتاب نخواهند بود. بنابراین از طرح توابعی که در دامنه آنها نقاط منفرد و جدا افتاده وجود دارد خودداری کنید زیرا در این نقاط حدگیری اصولا تعریف نمی شود با اینحال در سطوح بالاتر هر تابعی در چنین دامنه ای در این نقاط پیوسته محسوب می شود که در این سطح نمی توان توجیه مناسبی از آن ارائه داد و نیازی هم به بررسی این موارد نیست.

در این کتاب وارد مفاهیم پیوستگی چپ و راست نمی شویم و پیوستگی در نقاط انتهایی بازه ها همان پیوستگی نامیده می شود و از اصطلاح پیوستگی چپ و راست استفاده نمی کنیم.

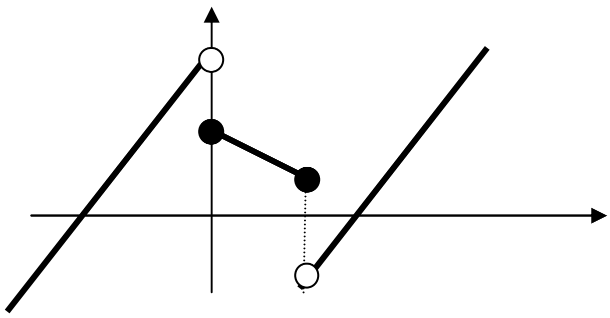
نکات مهم

هر تعریفی که در ریاضی ارائه می شود مربوط به دسته خاصی از اشیا می شود و برای اشیا دیگر بکار نمی رود. مثلا تعریف «اول بودن» مربوط به اعداد طبیعی است و کسی نمی پرسد که «آیا $\sqrt{2}$ عددی اول است؟» جواب به این پرسش آن است که مفهوم «اول بودن» برای اعداد طبیعی است و چنین سوالی بیجا است. در اینجا نباید بگوییم که چون $\sqrt{2}$ عدد طبیعی نیست پس اول هم نیست. عد طبیعی بودن، شرط آن است تا بتوانیم از «اول بودن» پرسش کنیم نه این که جزو تعریف «اول بودن» باشد. در حسابان نیز از این موارد داریم. مثلا در تعریف حد یک تابع در نقطه ای مانند a شرط اولیه آن است که تابع در یک همسایگی محذف یا همسایگی چپ یا راست a تعریف شده باشد. پس از برقراری این شرط است که از وجود یا عدم وجود حد تابع در a پرسش می کنیم. بنابراین در مقابل پرسش «آیا حد تابع $y=\sqrt{x}$ در -1 موجود است؟» باید بگوییم این تابع شرایط لازم برای چنین سوالی ندارد و این سوال بیجا است. نباید بگوییم

چون تابع در اطراف -1 تعریف نشده، در این نقطه حد ندارد باید بگوییم شرایط حدگیری برای چنین تابعی در چنین نقطه ای برقرار نیست..

همچنین در مورد مفهوم پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط آن که بتوانیم از پیوستگی صحبت کنیم آن است که نقطه در دامنه تابع باشد و تابع در یک همسایگی چپ یا راست آن نقطه تعریف شده باشد. پس از برقراری این شرایط حق داریم از پیوستگی یا ناپیوستگی تابع در این نقطه پرسش کنیم. در غیر این صورت، پرسش از پیوستگی تابع قابل انجام نیست و چنین پرسشی بیمعنا خواهد بود. مثلا در مورد پرسش «آیا تابع $\frac{1}{x}$ در صفر پیوسته است؟» باید بگوییم این پرسش قابل انجام نیست زیرا صفر در دامنه این تابع نیست. نباید بگوییم چون صفر در دامنه تابع نیست در این نقطه ناپیوسته است. همچنین اگر دامنه تابعی $[1,2]\cup\{0\}$ باشد پرسش از پیوستگی این تابع در 0 بیمعنا است زیرا اگرچه 0 در دامنه تابع است اما تابع در یک همسایگی چپ یا راست 0 تعریف نشده است، بنابراین شرایط لازم برای بررسی پیوستگی را ندارد.

نکته دیگر آن است که اگر دامنه تابعی را کوچکتر کنیم ممکن است تابع روی دامنه کوچکتر در نقاط انتهایی آن پیوسته شود در حالی که روی دامنه بزرگتر در آن نقاط ناپیوسته بوده است. مثلا تابعی با نمودار زیر که دامنه آن تمام $\mathbb{R}$ است در نقاط صفر و ۱ ناپیوسته است، اما اگر این تابع را فقط روی دامنه $[0\ 1]$ در نظر بگیریم در این نقاط پیوسته خواهد بود.



سوالات نمونه ای فصل چهارم

۱. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(1,1)$ و $(1+h,\sqrt{1+h})$ می گذرد. بانزدیک شدن h به صفر این خط به چه خطی نزدیک می شود؟ معادله آن خط را بنویسید و تعبیر هندسی آن را بیان کنید.

۲. تابع حرکت متحرکی روی محور xها برای $0<t$ به صورت $x(t)=\frac{\sin 2t}{t}$ است. این متحرک از چه نقطه ای شروع به حرکت کرده است؟

۳. در چه نقاطی می توان از حد تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{[x]-1}$ صحبت کرد؟ آیا این تابع در $x=\dfrac{1}{2}$ حد دارد و در صورت وجود، حد آن چقدر است؟ آیا این تابع در $x=1$ حد دارد؟ آیا این تابع در $x=2$ پیوسته است؟ وضعیت حدی این تابع و پیوستگی آن در $x=5$ چگونه است؟

٤. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ آیا می توان از $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}+\sqrt{-x})$ صحبت کرد؟ آیا می توان از $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}$ صحبت کرد؟ چرا قضیه حد مجموع توابع در اینجا برقرار نیست؟

۵. اگر f و g دو تابع باشند که در یک همسایگی محذوف a تعریف شده اند و f در a حد ناصفر داشته باشد و fg در a حد داشته باشد، ثابت کنید که g در a حد دارد. نتیجه بگیرید که اگر حاصلضرب دو تابع در نقطه ای حد داشته باشد و یکی از آن دو تابع در آن نقطه حد نداشته باشد تابع دیگر در آن نقطه حد صفر دارد.

٦. اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی محذوف a تعریف شده است و f^3 در a حد داشته باشد، ثابت کنید f در a حد دارد.

۷. اگر f تابعی باشد که در $x=a$ حد دارد با استقرا ثابت کنید:

$$\lim_{x\to a} f(x)^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$$

مطلب بالا را از طریق تابع پیوسته $g(x)=x^n$ و قضیه حد ترکیب یک تابع پیوسته با تابع حد دار، به دست آورید.

۸. تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ و ضابطه مشخص(چند ضابطه ای هم می تواند باشد) ارائه کنید که در $x=3$ حد راست و چپ متفاوت داشته باشد و این حدها با مقدار تابع در $x=3$ نیز متفاوت باشند. نمودار آن را رسم کنید.

۹. تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ و ضابطه مشخص(چند ضابطه ای هم می تواند باشد) ارائه کنید که در $x=1$ حد راست نداشه باشد ولی حد چپ داشته باشد و حد چپ با مقدار تابع در $x=1$ برابر باشد. نمودار آن را رسم کنید.

۱۰. به ازای چه مقادیری از a و b تابع زیر پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x<1 \\ a-b & x=1 \\ x-a & 1<x \end{cases}$$

۱۱. نشان دهید به ازای هیچ مقداری از a و b تابع زیر پیوسته نخواهد شد.

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x+bx+a+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ b\sin x+a & 0<x \end{cases}$$