فصل پنجم

مشتق توابع

نگاه کلی به فصل پنجم

اهداف کلی

- آشنایی با مفهوم مشتق توابع
- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و خط مماس بر نمودار تابع
- آشنایی با مشتق چپ و راست تابع و رابطه آن با مشتق تابع
- آشنایی با خط عمود بر نمودار یک تابع
- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و آهنگ تغییرات دو کمیت نسبت به هم
- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و سرعت متحرکها
- کسب توانایی در محاسبه مشتق توابع از طریق قضایای مشتق مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع
- آشنایی با رابطه بین مشتق و پیوستگی
- آشنایی با مفهوم اندازه مشتق و علامت مشتق
- آشنایی با مشتق توابع خاص چندجمله ای و مثلثاتی

آموزش فصل پنجم

- آشنایی با مشتق وارون توابع و ترکیب دو تابع
- آشنایی با مشتق توابع وارون مثلثاتی و رادیکالی

عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

- در مباحثات مربوط به مفاهیم طرح شده، وارد شوند و دیدگاههای خود را بیان کنند.
- خط مماس بریک منحنی را از طریق حد گیری از خطهای گذرنده از یک نقطه توضیح دهند.
- توصیف هندسی از خطهای گذرنده از یک نقطه را به طور جبری بیان کنند.
- مشتق یک تابع را به طور هندسی و جبری توضیح دهند و به هم مربوط کنند.
- در توابع ساده، مشتق را با استفاده از تعریف حساب کنند.
- مثالهایی از توابعی که مشتق ندارند ارائه کنند و نبود مشتق را به طور هندسی توضیح دهند.
- مشتق چپ و راست را به طور هندسی و جبری توضیح دهند و رابطه آنها را با مشتق بیان کنند.
- خط مماس و عمود بر نمودار یک تابع را بیابند.
- قضایای مشتق را در محاسبه مشتق توابع به درستی بکارگیرند.
- رابطه بین مشتق و آهنگ تغییرات و سرعت متحرکها را بیان کنند و از آن در حل مسائل استفاده کنند.

آموزش فصل پنجم

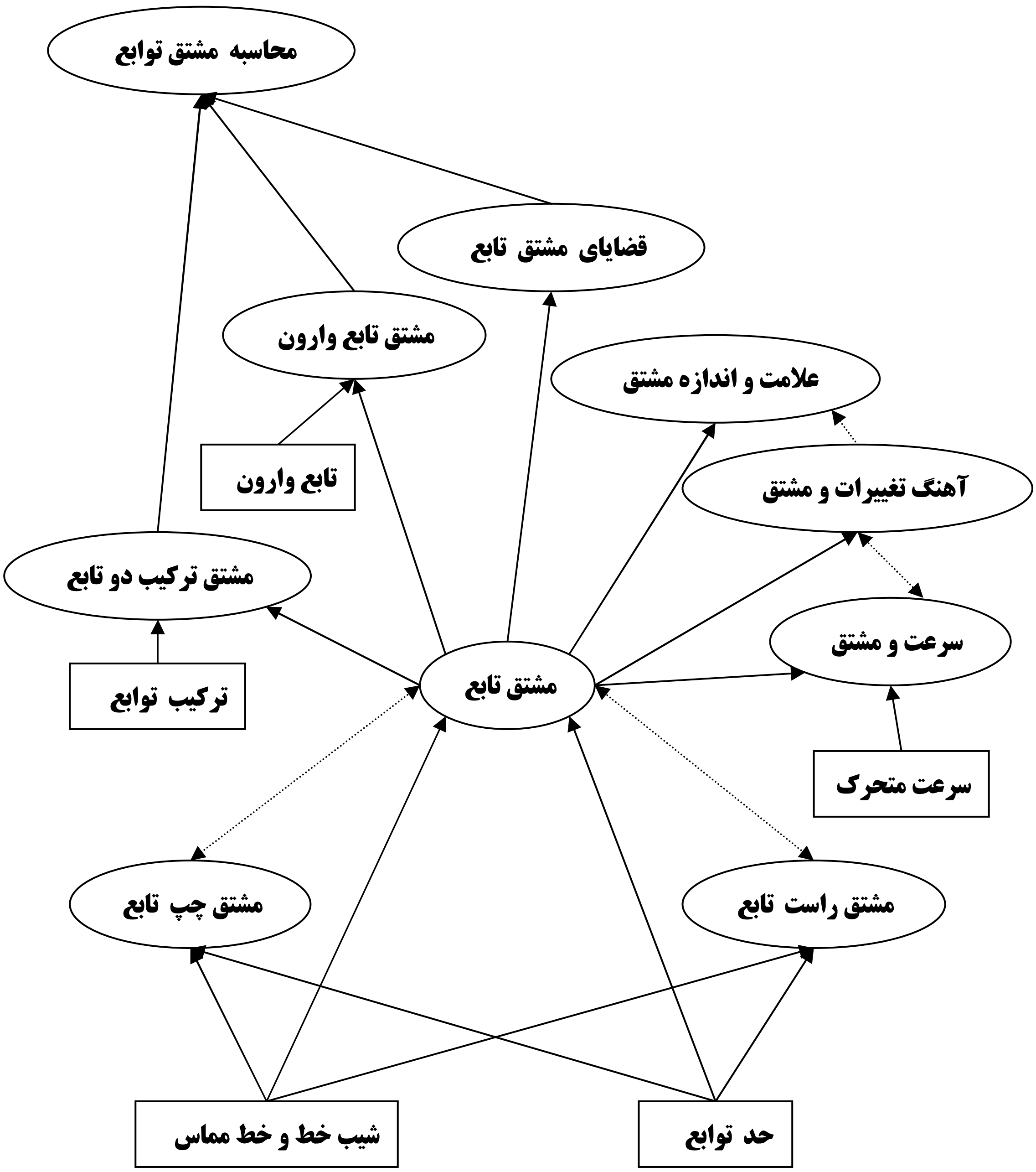
- تفسیر درستی از اندازه مشتق و علامت مشتق ارائه دهند و از آن برای توصیف رفتار تابع استفاده کنند.
- مشتق توابع خاص مانند چندجمله ایها و کسرهای از چندجمله ایها وتوابع مثلثاتی محاسبه کنند.
- مشتق وارون توابع را از روی شکل توضیح دهند و محاسبه کنند.
- مشتق ترکیب دو تابع را حساب کنند.

پیشنیازها

- آشنایی با تابع و نمودار تابع و حد تابع و حدهای خاص
- آشنایی با خط مماس بر منحنی ها
- آشنایی با حرکت و تابع حرکت و سرعت متحرکها
- آشنایی با توابع مثلثاتی و برخی حدهای خاص
- آشنایی با وارون توابع و ترکیب توابع

آموزش فصل پنجم

طرح کلی مفاهیم فصل پنجم



مستطیل ها نشان دهنده مفاهیم قبلی و بیضی ها نشان دهنده مفاهیم جدید هستند.

طرح آموزشی فصل پنجم

هدف اصلی این فصل آموزش مفهوم مشتق و ارتباطات آن با مفاهیم خط مماس بر نمودار توابع و سرعت متحرکها و آهنگ تغییرات کمیتها نسبت به هم است. برای کسب توانایی در بکارگیری مفهوم مشتق در حل مسائل کسب مهارتهای محاسبه مشتق نیز جزو اهداف این فصل است.

از آنجا که مفهوم مشتق همان میزان تغییرات یک کمیت نسبت به کمیت دیگر است، این مفهوم ارتباطات وسیعی با مفاهیم محیط پیرامونی دارد. به همین خاطر از زمینه های متعددی می توان برای ورود به مفهوم مشتق استفاده نمود. روش کتاب ایجاد تجربه از مفهوم مشتق در فرآیند حل یک مسئله است. این مسئله تا حد ممکن باید ساده باشد و دارای پیچیدگی های اضافی نباشد و تنها پیچیدگی آن همان مفهوم مشتق باشد. در اینجا دست معلم باز است که با توجه به سطح درک و فهم مخاطب خود و زمینه هایی که برای مخاطب آشناتر است مسئله ای را برای ورودی این بخش انتخاب کند.

در کتاب مسئله یافتن خط مماس بر یک منحنی انتخاب شده است. دلیل این انتخاب آن است که در فصل حد از مفهوم سرعت متحرک برای آموزش حد استفاده شده است و استفاده مجدد از آن ممکن است دانش آموز را دچار این بدفهمی کند که مشتق نیز همان حد است. همچنین خط مماس یک مفهوم هندسی است و می توان آن حدگیری که منجر به مفهوم مشتق می شود را مستقیما مشاهده کرد. در این عملیات، ارتباطات هندسی و جبری و ترجمه مفاهیم هندسی و جبری به یکدیگر به نحو بارزی رخ می دهند و تمرینی برای برقرار کردن این ارتباطات خواهد بود.

روش آموزشی این کتاب در آموزش مشتق، طرح مسئله هندسی یافتن خط مماس بر منحنی ها، ایجاد تجربه نسبت به مفهوم خط مماس به صورت تعمیم از خط مماس بر دایره به خط مماس بر منحنی های دلخواه، حل هندسی مسئله، ترجمه به حل جبری و نهایتا تعریف مشتق است. برای درک بهتر مشتق پذیری و مشتق ناپذیری وارد مفاهیم مشتق چپ و راست و مماسهای چپ و راست هم می شویم.

پس از یافتن درک مفهومی، مستقیما وارد قضایای اولیه مشتق مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع می شویم تا توانایی محاسبه مشتق توابع در دانش آموزان افزایش یابد و در عمل مسائل مهمتری را بتوانند حل کنند. شیوه ارائه قضایا نیز بر حدس و اثبات و محاسبه از طریق تعریف قرار دارد.

سپس وارد مفاهیم آهنگ تغییرات و سرعت متحرکها و ارتباط آنها با مشتقگیری می شویم و در این زمینه ها سعی می شود مفهوم مشتق عمیقتر شود. به ویژه در این قسمت در مورد این که علامت مشتق و اندازه مشتق نشان دهنده وضعیت صعودی و نزولی بودن تابع و شدت صعودی

و نزولی بودن تابع هستند بحث و بررسی می شود. روش آموزشی این قسمت به گونه ای است که با کاربرد مشتق در تفسیر وقایع در هم آمیخته است و چگونگی بکارگیری مشتق را به طور ضمنی آموزش می دهد.

بخشهای بعدی این فصل مجددا برای بالا بردن توانایی دانش آموز در محاسبه مشتق توابع بیشتری است و با همان روش حدس و محاسبه، قضایای اصلی در محاسبه مشتق توابع مثلثاتی و مشتق وارون توابع و مشتق ترکیب توابع ارائه می شوند.

بخش اول: خط مماس بر منحنی ها و مشتق توابع

اهداف بخش

- تعمیم مفهوم خط مماس بر دایره به منحنی دلخواه
- برقراری ارتباطات بین مفاهیم هندسی و جبری
- آشنایی با مفهوم مشتق توابع از طریق یافتن خط مماس
- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و خط مماس بر نمودار تابع
- آشنایی با مشتق پذیری و مشتق ناپذیری
- آشنایی با مشتق چپ و راست تابع و رابطه آن با مشتق تابع
- آشنایی با رابطه بین مشتق پذیری و پیوستگی
- آشنایی با خط عمود بر نمودار یک تابع

نگاه کلی به بخش

این بخش با طرح مسئله هندسی «یافتن خط مماس بر یک منحنی» شروع می شود. تا این زمان دانش آموز فقط با خط مماس بر دایره به خوبی آشنا است و نسبت به خط مماس بر یک منحنی فقط یک احساس مبهم دارد که در برخی حالات پیچیده ممکن است تشخیص درستی نداشته باشد. به همین خاطر ابتدا با رسم چند وضعیت، از دانش آموزان می خواهیم نظر خود را نسبت به مماس بودن یا نبودن بیان کنند. جوابها لزوما درست نیستند ولی با مباحثه می توانیم تا حدی دانش

آموزان را به جواب درست راهنمایی کنیم. پس از این تجربه به حل واقعی مفهوم خط مماس در طی یک فعالیت می پردازیم. در اینجا دانش آموزان می بینند که با یک مفهوم حدی سر و کار دارند. در فعالیت بعدی ایده به دست آمده را در مورد یگ تابع ساده پیاده سازی می شود. پس از کسب موفقیت در این تابع ساده، به تابع دلخواه روی می آوریم و عملیات محاسبه شبیب خط مماس را در تابع دلخواه انجام می دهیم و مفهوم مشتق را به دست می آوریم.

از آنجا که برای درک بهتر مشتق باید حالات مشتق ناپذیری هم دیده شوند و در حالات مشتق ناپذیری عموما مشتقهای چپ و راست حضور دارند، به این مفاهیم پرداخته می شوند. سطح پیچیدگی این مطالب بیشتر از مفهوم مشتق نیست و پس از درک مشتق و حدهای چپ و راست، مفاهیم مشتق چپ و راست پیچیدگی اضافی نخواهند داشت.

در این بخش همچنین رابطه بین مشتقپذیری و پیوستگی ارائه می شود و مفهوم خط عمود بر یک منحنی تعریف می شود.

ورود به مطلب

برای یک ورود مناسب به مفهوم مشتق نیازمند موقعیتی هستیم که در آن مفهوم مشتق حضور داشته باشد و به روشنی دیده شود. طرح چنین موقعیتی بستگی به دانش و تجربه مخاطب دانش آموزان دارد و در هر مکانی ممکن است مسئله خاصی مناسب باشد که تشخیص آن با معلم است.

در کتاب مسئله یافتن خط مماس بر یک منحنی پیشنهاد شده است. در این مسئله مفهوم مشتق همان شیب خط مماس است که مستقیما دیده می شود. برای حل مسئله و رسیدن به این مفهوم، باید از دانش آموزان خواست که راه حلهای خود را پیشنهاد دهند. در صورت نداشتن ایده برای حل این مسئله، معلم باید راهنمایی مناسب ارائه کند و خطهایی نزدیک خط مماس ارائه کند و از دانش آموزان بخواهد خطهای دقیقتری رسم کنند تا نهایتا دانش آموزان به تعریف حدی از خط مماس برسند. سپس این حل هندسی باید به یک حل جبری، حداقل در مورد یک تابع خاص (مانند کتاب) ترجمه شود و این عملیات در طی یک مباحثه و راهنمایی (تا آنجا که ممکن است) توسط خود دانش آموزان صورت بگیرد.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح یک مسئله شروع می شود که تا حدی تعمیم مفهوم خط مماس بر دایره به خط مماس بر یک منحنی دلخواه را در بر دارد. ابتدا سعی می شود تجربه ای از خط مماس بر منحنی

های دیگر در شکلهای گوناگون ایجاد شود. در این مرحله لزومی ندارد که دانش آموز تشخیص درستی از خط مماس ارائه کند. این تجربه باعث می شود دانش آموز در مورد مفهوم خط مماس عمیقتر فکر کند. در فعالیت اول این فصل حل هندسی یافتن خط مماس ارائه می شود.

حل فعالیت اول

۱. با نزدیک شدن B به A، خط AB به خط d نزدیک می شود که مماس بر دایره است.

۲. با نزدیک شدن B به A، خط AB به خط d نزدیک می شود که مماس بر منحنی دیده می شود.

پس از این فعالیت، مفهوم خط مماس از طریق یک عمل حدگیری ارائه می شود. این عملیات همگی هندسی هستند و با مفاهیم هندسی بیان شد اند. در مرحله بعدی به توصیف جبری این مفاهیم پرداخته می شود و حل هندسی به یک حل جبری تبدیل می شود.

حل فعالیت دوم

۱. $\text{شیب خط } AB = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{a+h-a} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$

۲. نقطه B به نقطه A نزدیک می شود.

۳. شیب خط AB به $2a$ نزدیک می شود.

٤. خط AB به خط مماس بر نمودار تابع در نقطه A نزدیک می شود پس شیب آن به شیب خط مماس نزدیک می شود. بنابراین شیب خط مماس $2a$ است.

پس از این فعالیت مفهوم مشتق توابع عملا درک شده است و در مورد یک تابع خاص محاسبه شده است. اکنون می توانیم با جمعبندی عملیات انجام شده مفهوم مشتق یک تابع دلخواه را معرفی کنیم و در چند مثال بررسی کنیم. از آنجا که در محاسبه مشتق به دو شکل می توان متغیر حدگیری را انتخاب کرد و هر کدام برای خود فوایدی در بردارند شکل دوم بیان مشتق نیز آمده است.

این عمل شبیه تعویض متغیر در حدگیری است ولی ما از تعویض متغیر استفاده نکرده ایم و فقط مسئله هندسی یافتن خط مماس را توصیف جبری دیگری آورده ایم. در این قسمت مفهوم تابع مشتق نیز گنجانده شده است که دامنه آن ممکن است کوچکتر از دامنه خود تابع باشد.

آموزش فصل پنجم

حل تمرین در کلاس اول

مستقیما با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در نقاط منفی و مثبت و نقطه صفر بررسی می کنیم و نتیجه می شود تابع در صفر مشتق پذیر نیست و دامنه تابع مشتق $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & 0<x\end{cases}$$

از آنجا که در اکثر مثالهای مشتق ناپذیری، مشتقهای چپ و راست موجودند، درفعالیت بعدی این مفهوم مورد توجه قرار گرفته است.

حل فعالیت سوم

۱. وقتی نقطه $B(x\ ,\ f(x))$ را سمت راست نقطه A در نظر بگیریم معنای آن این است که $0<x$ و در این شرایط نزدیک شدن x به صفر و یافتن حد شیب خط AB به معنای محاسبه حد راست $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ است.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x+1)^2+4-3}{x}=-2$$

۲. با استدلال مشابه، در اینحالت یافتن حد شیب خط AB به معنای محاسبه حد چپ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x-1)^2+4-3}{x}=2$$

۳. این تابع در صفر مشتق پذیر نیست زیرا در صورت مشتق پذیری دو حد چپ و راست در بندهای بالا باید مساوی می بودند. خطهایی که با شیبهای بند قبل از نقطه A رسم می شوند دو خط متفاوتند که خط با شیب ۲- بر قسمت راست نمودار مماس است و خط با شیب ۲ بر قسمت چپ نمودار مماس است.

پس از این فعالیت مفهوم مشتق چپ و راست جمعبندی و نمادهای ریاضی آن ارائه می شود و مثالهایی ارائه می شود.

حل تمرین در کلاس دوم

۱. با استفاده از تعریف، مشتق این تابع را در نقطه ۱- حساب می کنیم.

$$g'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{x+1}{x-1}-0}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین شیب خط مماس در نقطه A برابر $-\frac{1}{2}$ است و معادله خط مماس به صورت $y=-\frac{1}{2}x+1$ خواهد بود. برای محاسبه تابع مشتق، مشتق این تابع را با استفاده از تعریف در یک نقطه دلخواه $a\neq 1$ حساب می کنیم.

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{a+1}{a-1}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{ax+a-x-1-ax+a-x+1}{(x-1)(a-1)}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(a-x)}{(x-1)(a-1)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-2}{(x-1)(a-1)}=\frac{-2}{(a-1)^2}$$

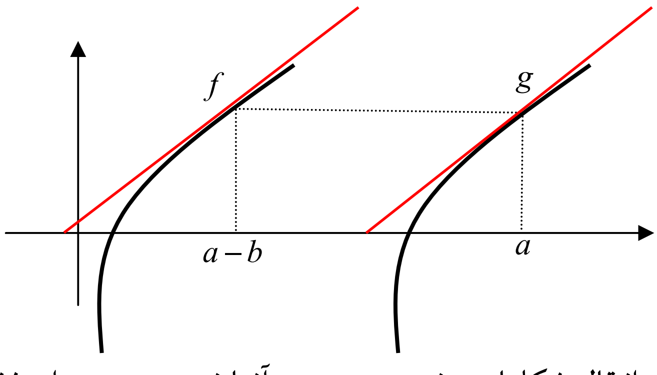
بنابراین دامنه تابع مشتق برابر دامنه تابع است و داریم:

$$g'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

۲. با توجه به مثالهای ارائه شده دانش آموزان باید بتوانند دو تابع متفاوت در سمت چپ و راست نقطه ۲ بنویسند که در این نقطه با هم برخورد کنند ولی شیبهای خطهای مماس بر این دو تابع در این نقطه متفاوت باشند. ساده ترین مثال استفاده از دو خط متفاوت است که در $x=2$ برخورد داشته باشند. مثلا

$$y=\begin{cases}2x & x\le 2\\ x+2 & 2<x\end{cases}$$

۳. الف) نمودار تابع g منتقل شده نمودار تابع f به طور افقی به اندازه b واحد است. مانند شکل زیر



از آنجا که عمل انتقال شکلها و وضعیت هندسی آنها نسبت به هم را حفظ می کند بنابراین در صورت وجود خط مماس بر نمودار g، با انتقال آن به اندازه $-b$ به نمودار f می رسیم که آنهم خط مماس دارد. عمل انتقال جهت خطها را عوض نمی کند و شیب آنها ثابت باقی می ماند. بنابراین به طریق هندسی نشان داده ایم که مشتق پذیری g در a نتیجه می دهد f در $a-b$ مشتق پذیر است و $g'(a)=f'(a-b)$.

ب) در این قسمت می خواهیم نتیجه بالا را به طور جبری به دست آوریم.

$$g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h-b)-f(a-b)}{h}=f'(a-b)$$

ج) این قسمت عکس قسمت (ب) است و با یک محاسبه جبری به دست می آید. محاسبه کاملا مانند بالا است فقط تفسیر آن متفاوت است. در قسمت (ب) محاسبه بالا را باید این گونه تفسیر کنیم که تساویهای سمت چپ مفروضند و نهایتا تعریف مشتق پذیری f در نقطه $a-b$ به دست می آید. در قسمت (ج) تساویهای بالا را باید این گونه تفسیر کنیم که می خواهیم مشتق پذیری g در نقطه a را بررسی کنیم و نهایتا به کسری می رسیم که حد آن همان مشتق f در نقطه $a-b$ است که طبق فرض وجود دارد.

این تمرین در کلاس ابزاری محاسباتی در اختیار ما قرار می دهد که با دانستن مشتق برخی توابع، بتوانیم مشتق انتقال یافته آنها را هم حساب کنیم.
در قسمت بعد به رابطه بین مشتق پذیری و پیوستگی پرداخته می شود و قضیه مربوط به آن با محاسبه مستقیم ثابت می شود. در آخرین قسمت این بخش مفهوم خط عمود بر نمودار یک تابع از طریق خط مماس بیان می شود.

حل مسائل

۱. مشتق تمامی این توابع باید از طریق تعریف انجام شود که مشابه آنها در کتاب انجام شده است. به عنوان نمونه (ج) و (ه) را در اینجا محاسبه می کنیم.

(ج) $$x'(t)=\lim_{z\to t}\frac{x(z)-x(t)}{z-t}=\lim_{z\to t}\frac{z^4-t^4}{z-t}=\lim_{z\to t}\frac{(z-t)(z^3+z^2t+zt^2+t^3)}{z-t}=4t^3$$

(ه) $$k'(x)=\lim_{z\to x}\frac{k(z)-k(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{z}\sqrt{x}(z-x)}$$
$$=\lim_{z\to x}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{z})}{\sqrt{z}\sqrt{x}(z-x)(\sqrt{x}+\sqrt{z})}=\lim_{z\to x}\frac{-1}{\sqrt{z}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{z})}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

۲. الف)

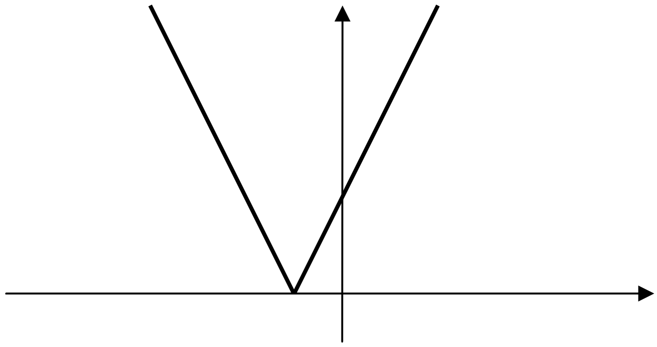
$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-1-x^2}{2(1+x^2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{2(1+x^2)}=-\frac{1}{2}$$

خط گذرنده از $(1,\frac{1}{2})$ با شیب $-\frac{1}{2}$ خط مماس است و خط گذرنده از این نقطه با شیب ۲ خط عمود بر نمودار تابع است.

ب) این قسمت مشابه قسمت (الف) است و فقط مشتق را حساب می کنیم.

$$y'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3})(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}{(x+1)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{4-x^2-3}{(x+1)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

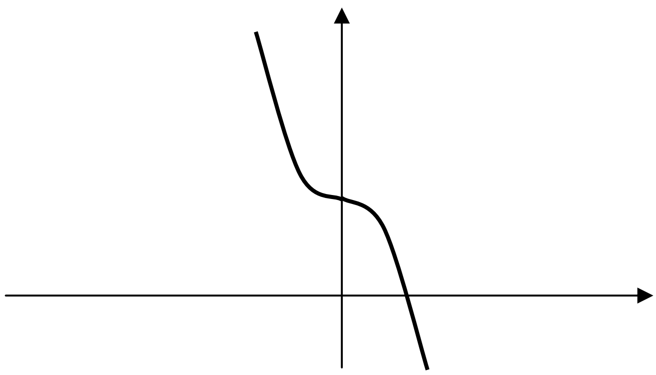
۳. الف)



نمودار بالا از دو خط تشکیل شده است که در همه نقاط غیر از نقطه برخورد خط مماس موجود است که خود آن خط است. در نقطه برخورد، سمت چپ و راست تابع با هم فرق دارد و مشتقهای چپ و راست متفاوتند.

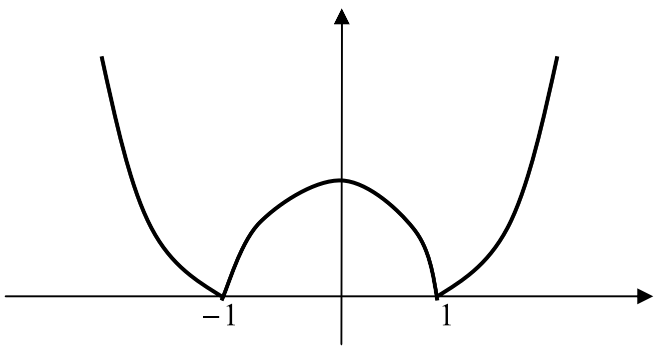
$$y'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2|x+1|}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$
$$y'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2|x+1|}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-2(x+1)}{x+1} = -2$$

ب)



به نظر می رسد در همه نقاط مشتق پذیری برقرار است. ولی برای اطمینان مشتق چپ و راست را در صفر بررسی کنید که هر دو صفرند.

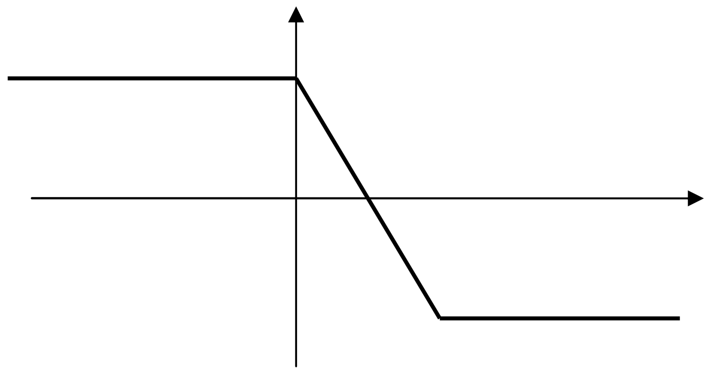
ج)



به نظر می رسد در همه نقاط غیر از ۱ و ۱− مشتق پذیری برقرار است. با محاسبه مشتق چپ و راست در این نقاط معلوم می شود مشتقهای چپ و راست برابر ۲ و ۲− هستند و مساوی نیستند.

د) برای رسم این تابع می توانیم آن را به صورت چندضابطه ای بنویسیم.

$$y(x) = -|x| + |x-1| = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ -2x+1 & 0 < x \le 1 \\ -1 & 1 < x \end{cases}$$



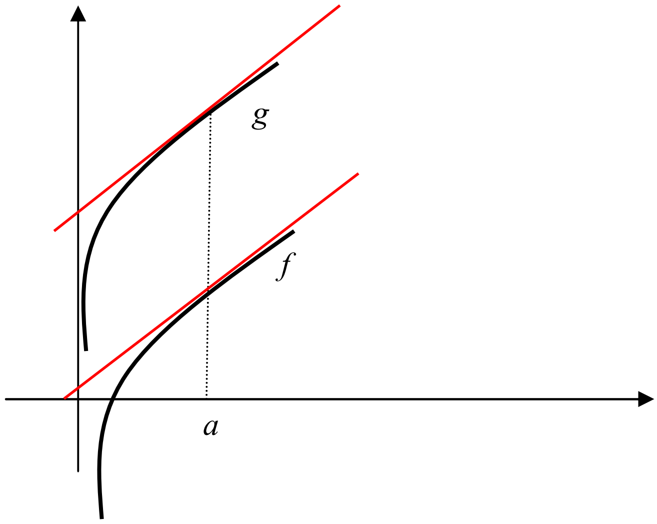
نمودار نشان می دهد که مشتق پذیری در نقاط صفر و ۱ برقرار نیست و در این نقاط مشتقهای چپ و راست، صفر و ۲− هستند.

٤. ابتدا با تجسم هندسی که از منحنی $y(x) = \sqrt{x}$ داریم حدسی را ارائه می کنیم. سپس برای بررسی درستی حدس، راه حل جبری در پیش می گیریم. اگر خط $y = 2x$ را به موازات خود بالا و پایین ببریم خطهایی به دست می آیند که شیب همه آنها ۲ است. اگر قرار باشد یکی از این خطها بر نمودار مماس شوند باید شیب خط مماس بر یکی از نقاط نمودار برابر ۲ باشد. یعنی معادله $y'(x) = 2$ باید جواب داشته باشد و به اندازه تعداد جوابهای این معادله مسئله جواب خواهد داشت.

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{16}$$

بنابراین مسئله جواب دارد و فقط یک جواب دارد و جابه جا شده خط $y = 2x$ در نقطه $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ بر نمودار $y(x) = \sqrt{x}$ مماس می شود.

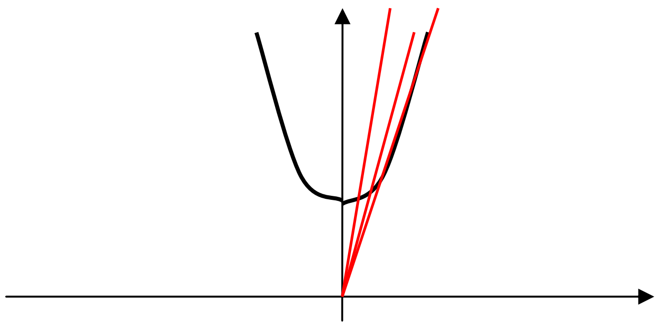
۵. نمودار $g(x) = f(x) + b$ انتقال یافته نمودار $f(x)$ به طور عمودی به اندازه b واحد است. مانند شکل زیر



عمل انتقال شکلها را حفظ می کند و جهت خطها را تغییر نمی دهد. بنابراین وجود خط مماس بر یکی از نمودارها وجود خط مماس بر دیگری و مساوی بودن شیبها را نتیجه می دهد، یعنی $g'(a) = f'(a)$. بررسی درستی این رابطه به طور جبری به شکل زیر خواهد بود.

$$g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+b-f(a+h)-b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

٦. ابتدا با ترسیمات هندسی یک حدس می زنیم و سپس با محاسبات جبری درستی حدس خود را بررسی می کنیم.



از شکل بالا می توان حدس زد که در یک نقطه سمت راست منحنی، مماس بودن رخ خوهد داد و به خاطر تقارن، در سمت چپ هم نقطه ای با این شرایط وجود دارد و مسئله دو جواب دارد.

برای بررسی درستی این حدس یک راه آن است که معادله خط مماس بر یک نقطه دلخواه (α, α^2+1) از نمودار تابع را بنویسیم و ببینیم تحت چه شرایطی روی α این خط از مبدا می گذرد. شیب خط مماس در این نقطه 2α است و معادله خط مماس به شکل زیر است.

$$y-(\alpha^2+1) = 2\alpha(x-\alpha)$$

برای آن که این خط از مبدا بگذرد باید (0.0) در این معادله صدق کند که منجر به معادله $-(\alpha^2+1)=-2\alpha^2$ می شود که دو جواب $\alpha=\pm 1$ دارد.

راه دوم آن است که کلیه خطوط گذرنده از مبدا را بنویسیم و ببینیم کدامیک دو نقطه برخورد یکسان با نمودار تابع دارند. کلیه خطوط گذرنده از مبدا به شکل $y=mx$ هستند. البته خط عمود بر محور xها جزو این خطوط نیست و ما با بررسی این حالت خاص می دانیم که این خط جواب مسئله نیست. طول نقاط برخورد از معادله زیر به دست می آید.

$$x^2-mx+1=0$$

شرط وجود جواب مضاعف آن است که $m^2-4=0$ و دو جواب $m=\pm 2$ به دست می آید. اگر شکل سهمی و خطها با دقت کافی رسم شوند مماس بودن این خطها بر سهمی دیده خواهد شد.

۷. در اینجا فقط یک محاسبه جبری درستی مطلب را نشان می دهد. در این محاسبات یک تعویض متغیر h به ah انجام می شود که در صورت لزوم، درستی آن را به طور شهودی استدلال کنید. در محاسبه زیر a ناصفر فرض می شود.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a(x+h))-f(ax)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a\frac{f(ax+ah)-f(ax)}{ah} = af'(ax) \end{aligned}$$

در حالت $a=0$، g تابع ثابت $g(x)=f(0)$ است و مشتق آن در همه جا صفر است. در اینحالت عبارت $af'(ax)$ نیز ثابت صفر است و تساوی برقرار است.

ارزیابی یاد گیری

هدف اصلی این بخش درک مفهومی مشتق از طریق خط مماس بر نمودار توابع و توانمند شدن در بکار گیری تعریف مشتق، در محاسبه مشتق توابع ساده است. بنابراین ارزیابی این بخش باید از طریق سوالاتی انجام گیرد که نشان دهنده درک هندسی آنها از مفهوم مشتق و توانایی محاسباتی آنها در مثالهای ساده باشد.

محدوده مطالب

در این قسمت درک مفهوم مشتق و توانایی بکارگیری تعریف برای محاسبه مشتق توابع ساده مورد نظر است. علاوه بر این درک مفاهیم مشتق چپ و راست و مشتق ناپذیری در حالتی که مشتقهای چپ و راست موجودند ولی مساوی نیستند و چگونگی شکل نمودار تابع در این گونه موارد،

مورد نظر است. دانش آموز باید رابطه بین مشتق پذیری و پیوستگی را بشناسد و از طریق نمودار شرایط مشتق پذیری را که مربوط به وجود خط مماس غیر عمودی است بشناسد.
توانایی یافتن خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع ساده که مشتق آنها از طریق تعریف قابل محاسبه است در این بخش مورد نظر است. حل مسائلی که مربوط به رابطه مشتق و تعبیر هندسی خط مماس است قابل طرح است. طرح مسائلی که فقط پیچیدگی محاسباتی دارند و کمکی به درک مفهوم مشتق و رابطه آن با خط مماس نمی کنند در محدوده این بخش نیست.
در این کتاب در مورد مشتق پذیری و مشتق در نقاط انتهایی صحبتی نمی شود و لزومی ندارد وارد چنین بحثی شوید. اما اگر در این مورد پرسشی مطرح شود جواب آن است که مشتق و مشتق پذیری در نقاط انتهایی به همان معنای مشتق چپ یا راست می باشد.

نکات مهم

در مواردی که خط مماس بر نمودار تابع عمودی است از لحاظ هندسی خط مماس وجود دارد ولی از لحاظ جبری تابع مشتق پذیری ندارد. لازم است مثالهایی در مورد این گونه نقاط آورده شود و دلیل این رخداد که مربوط به نداشتن شیب برای خطهای عمودی است تذکر داده شود. البته در سال بعد که حدهای با مقدار بینهایت گفته می شود می توان در باره خطهای مماس عمودی نیز از طریق مشتقهای با مقدار بینهایت صحبت کرد.

بخش دوم: روشهای محاسبه مشتق توابع

اهداف بخش

- کسب توانایی در محاسبه مشتق توابع از طریق قضایای مشتق مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش، مشتق جند تابع خاص و چند قضیه اصلی در مورد مشتق مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع مطرح می شود که به دانش آموزان در محاسبه مشتق توابع کمک خواهد کرد. حالتهای

آموزش فصل پنجم

خاصی از مشتق گیری مانند مشتق توان nام یک تابع مشتق پذیر نیز ارائه می شود و در بخش قبلی مشتق $f(ax)$ نیز مطرح شده است.

ورود به مطلب

در این بخش حدس و محاسبه مستقیم از طریق تعریف مشتق مورد نظر است. برای ارائه هر قضیه مناسب است ابتدا زمینه ای برای آن ایجاد شود و یک حدس اولیه نسبت به آن زده شود. در این قسمت برخی محاسبات به کمک قضایای قبلی انجام شده است و این عمل تحویل یک مسئله به مسائل قبلی است.

فعالیت آموزشی

هدف این فصل توانمند سازی دانش آموزان در محاسبه مشتق توابع است. ابتدا مشتق برخی توابع خاص آورده شده است، سپس برای بیان قضیه مشتق مجموع دو تابع فعالیتی آورده شده است تا درستی قضیه توجیه شود

حل فعالیت چهارم

۱. مستقیما مشتق تابع $y = x + x^2$ را با استفاده از تعریف دریک نقطه دلخواه a حساب می کنیم.

۲. مشاهده می کنیم $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

۳. شیوه محاسبه نشان می دهد که در مورد هر دو تابع دیگری نیز همین نتیجه به دست می آید.

در کتاب، این نتیجه گیری با محاسبه در مورد هر دو تابع دلخواه ثابت می شود.

حل تمرین در کلاس سوم

۱. برای محاسبه مشتق این تابع آن را به صورت مجموع دو تابع آشنا در می آوریم.

$$y' = \left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 1\right)' = (\sqrt{x})' + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲.

$$(cf)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{cf(x) - cf(a)}{x-a} = c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = cf'(a)$$

۳.

$$(f-g)'(a) = (f + (-1)g)'(a) = f'(a) + (-1)g'(a) = f'(a) - g'(a)$$

٤.

$$(f+g+k)'(a) = ((f+g)+k)'(a) = (f+g)'(a) + k'(a) = f'(a) + g'(a) + k'(a)$$

اگر تعداد توابع بیشتر هم باشد می توان استدلال بالا را تکرار کرد.

پس از قضیه مشتق مجموع دو تابع به مشتق حاصلضرب دو تابع پرداخته می شود. ابتدا در مورد این قضیه حدسیه سازی می شود که حدس اول نادرست است. سپس با محاسبه مستقیم حکم قضیه ساخته می شود.

حل تمرین در کلاس چهارم

۱. برای محاسبه مشتق $f(x)^2$ داریم:

$$(f(x)^2)' = (f(x)f(x))' = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

در حالت کلی تر فرمول به ازای $n=1$ درست است و اگر فرمول به ازای $n=k$ درست باشد درستی آن را به ازای $n=k+1$ ثابت می کنیم.

$$\begin{aligned}(f(x)^{k+1})' &= (f(x)^k f(x))' = (f(x)^k)' f(x) + f(x)^k f'(x)\\ &= kf(x)^{k-1} f'(x) f(x) + f(x)^k f'(x) = (k+1) f(x)^k f'(x)\end{aligned}$$

۲. با توجه به فرضیات می توانیم از طرفین تساوی $k(x)g(x) = f(x)$ مشتق بگیریم.

$$\begin{aligned}&(k(x)g(x))' = f'(x) \Rightarrow k'(x)g(x) + k(x)g'(x) = f'(x)\\ &\Rightarrow\ k'(x)g(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}\\ &\Rightarrow\ k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

در این تمرین در کلاس فرمول مشتقگیری تقسیم دو تابع و توان یک تابع به دست می آیند.

حل مسائل

۱. مشتق کلیه توابع این مسئله با استفاده از قضایای گفته شده و مشتق توابع آشنا قابل محاسبه اند.

۲. برای آن که خطی موازی نیمساز ربع اول باشد باید شیب آن برابر ۱ باشد. پس باید نقاطی از نمودار تابع $y(x)$ را بیابیم که $y'(x) = 1$. جوابهای این معادله جوابهای مسئله خواهند بود. در مورد این مسئله خاص ما هنوز نمودار آن را نمی شناسیم و به طور هندسی حدسی در مورد جواب نداریم. ولی می توانیم جواب مسئله را به طور جبری حساب کنیم.

$$y'(x) = 3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

این مسئله دو جواب در نقاط $(1,-7)$ و $(-1,-5)$ از نمودار تابع دارد.

۳. نمودار تابع را با روشهای گفته شده رسم کنید. برای آن که مماس بر نمودار موازی محور xها شود شیب آن باید صفر شود. پس باید معادله $y'(x)=0$ را حل کنیم.

$$y'(x)=-8x+16=0 \Rightarrow x=2$$

بنابراین فقط در نقطه به طول $x=2$ این اتفاق می افتد و از روی شکل دیده می شود که این نقطه راس سهمی است.

٤. با رسم خطوط گوناگون ابتدا از دانش آموزان بخواهید حدسی در مورد جواب این مسئله بزنند. حال برای بررسی درستی حدس به طور جبری عمل می کنیم. خط دلخواهی که موازی محور yها نیست دارای شیب دلخواه m است. باید دید که آیا نقطه ای روی سهمی $y=x^2$ یافت می شود که شیب خط مماس برابر m باشد؟ یعنی آیا معادله $y'(x)=m$ جواب دارد؟

$$y'(x)=2x=m \Rightarrow x=\frac{m}{2}$$

این معادله به ازای هر مقدار m جواب منحصر به فرد دارد.

برای تابع $y(x)=\sqrt{|x|}$ نیز ابتدا به طریق هندسی تجربه کنید و حدس بزنید. برای حل جبری، در نقاط ناصفر داریم:

$$y'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x \end{cases}$$

در اینحالت معادله $y'(x)=m$ به ازای هر مقدار ناصفر m جواب منحصر بفرد دارد.

۵. این مسئله راه حلهای گوناگونی دارد. یک راه حل آن است که از دو نقطه دلخواه سهمی $y=x^2$ خط مماس رسم کنیم و شرط عمود بودن را بررسی کنیم. اگر این دو نقطه دلخواه طولهای α و β داشته باشند شیب خطهای مماس در این نقاط 2α و 2β خواهد بود و برای عمود بودن آنها باید داشته باشیم $(2\alpha)(2\beta)=-1$. بنابراین شرط عمود بودن آن است که $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$. محل تقاطع این دو خط مماس را به دست می آوریم. معادله این دو خط به شکل زیر است.

$$y=2\alpha x-\alpha^2$$
$$y=2\beta x-\beta^2$$

طول نقطه برخورد به شکل زیر به دست می آید.

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2 \Rightarrow 2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2 \Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

عرض نقطه برخورد نیز به شکل زیر به دست می آید.

$$y = 2\alpha\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2 = -\frac{1}{4}$$

عرض نقاط برخورد ثابت $-\frac{1}{4}$ است یعنی مکان این نقاط روی خط $y = -\frac{1}{4}$ قرار دارد. اما آیا تمام نقاط این خط جواب مسئله می باشند؟ طول نقاط برخورد دو خط عمود به صورت زیر است.

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{4\alpha})$$

به ازای هر مقدار x معادله بالا بر حسب α معادله ای درجه دوم است که دلتای آن مثبت است و جواب دارد. یعنی هر نقطه ای روی خط $y = -\frac{1}{4}$ محل برخورد دو خط مماس عمود بر هم است.

٦. مشتق پذیری $\frac{1}{f}$ را طبق تعریف مشتق بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

٧. از طرفین تساوی $f(x)^k = x$ مشتق می گیریم.

$$(f(x)^k)' = (x)' \Rightarrow kf(x)^{k-1}f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{kf(x)^{k-1}} = \frac{1}{k(x^{\frac{1}{k}})^{k-1}} = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$$

٨. عدد گویای مثبت r را به صورت $\frac{m}{n}$ در نظر می گیریم که m و n اعداد طبیعی هستند.

$$(x^r)' = ((x^{\frac{1}{n}})^m)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(x^{\frac{1}{n}})' = mx^{\frac{m-1}{n}} \times \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1}$$

برای عدد گویای منفی r عدد $-r$ گویا و مثبت است و داریم:

$$(x^r)' = (\frac{1}{x^{-r}})' = -\frac{(x^{-r})'}{x^{-2r}} = -\frac{(-r)x^{-r-1}}{x^{-2r}} = rx^{r-1}$$

٩. $$y' = (6\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x})' = (6x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{4}})' = 6\times\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 3\times\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = 2x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

ارزیابی یادگیری

هدف این قسمت بالا بردن توانایی محاسبه مشتق توابع است. در این قسمت دانش آموزان باید مشتق توابع خاص را بشناسند و شرایط قضایای مشتق مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع را بشناسند و به درستی در محاسبات بکار برند.

محدوده مطالب

در این بخش امکاناتی برای دانش آموز فراهم می شود تا توانایی محاسباتی مشتق برخی توابع را پیدا کند. این توانایی کامل نیست و در آخرین بخشهای این فصل کامل می شود. بنابراین در مسائل این بخش به محدودیت توانایی دانش آموز در محاسبه مشتق توابع توجه داشته باشید.

بخش سوم: آهنگ تغییرات

اهداف بخش

- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و آهنگ تغییرات دو کمیت نسبت به هم
- آشنایی با رابطه بین مشتق تابع و سرعت متحرکها
- آشنایی با معنای اندازه مشتق و علامت مشتق

نگاه کلی به بخش

این بخش با فعالیتی آغاز می شود که رابطه بین مشتق و سرعت یک متحرک را نشان می دهد. از طریق همین ارتباط علامت مشتق و اندازه مشتق قابل تفسیر می شود و در مورد معنای علامت مشتق واندازه آن نتیجه گیری می شود.

سپس مفهوم آهنگ تغییرات و رابطه آن با مشتق طرح می شود. در یک مثال اقتصادی مفهوم مشتق و معنای آن در زمینه ای دیگر بررسی می شود. در این بخش نمودار زمان–مکان یک متحرک و تفسیر چگونگی حرکت توسط آن به نحو جدیتری در متن و مسائل مطرح می شود.

ورود به مطلب

در این قسمت چند مفهوم شهودی مطرح اند که می خواهیم ارتباط آنها را با مشتق به دست آوریم. بنابراین کافی است این مفاهیم را در زمینه ای آشنا مطرح سازیم و در محاسبه آنها با مفهوم مشتق روبرو شویم.

فعالیت آموزشی

هدف این بخش برقراری ارتباط بین مفهوم مشتق با مفاهیم سرعت و آهنگ تغییرات است. به همین خاطر فعالیتی که در این بخش آمده است در ارتباط با سرعت یک متحرک است.

حل فعالیت پنجم

۱. سرعت متوسط برابر است با

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}=\frac{(t_0+h)^2-(t_0+h)-t_0^{\,2}+t_0}{h}=h+2t_0-1$$

۲. با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به $2t_0-1$ نزدیک می شود.

۳. این مقدار همان مشتق $x(t)$ در نقطه t_0 است.

٤. سرعت متحرک در هر لحظه همان مشتق تابع $x(t)$ در همان لحظه است.

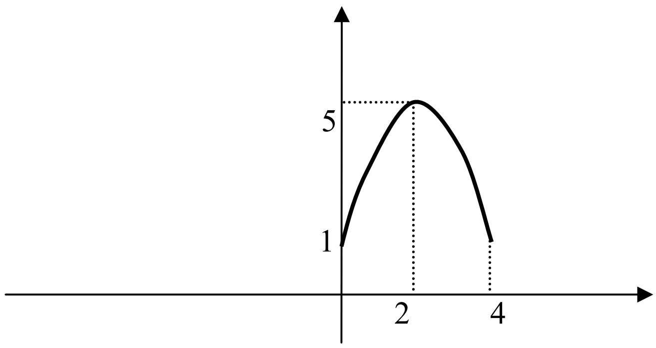
پس از این فعایت نتایج به دست آمده جمعبندی می شود و در یک مثال این نتایج با جزئیات بیشتری مور توجه قرار می گیرند.

حل تمرین در کلاس پنجم

۱. در این حالت متحرک ایستاده است و هیچ حرکتی ندارد و سرعت آن صفر است. تابع حرکت ثابت است و مشتق آن نیز صفراست که نشان دهنده سرعت صفر متحرک است.

۲. این متحرک از نقطه ۱ در جهت مثبت شروع به حرکت می کند و در هر واحد زمانی ۲ واحد مکانی طی می کند. حرکت یکنواخت است و سرعت متحرک ثابت ۲ است. مشتق تابع نیز در هر نقطه ۲ است که همان سرعت ثابت متحرک را نشان می دهد.

۳.



نمودار نشان می دهد که متحرک در لحظه صفر در نقطه ۱ بوده است و ابتدا در جهت مثبت حرکت کرده و از مبدا دور شده است تا در لحظه ۲ به نقطه ۵ رسیده است و در این نقطه رو به مبدا برگشته است و در جهت منفی حرکت کرده و در لحظه ٤ به نقطه ۱ بازگشته است.

مشتق تابع حرکت $x'(t) = -2t + 4$ است که سرعت متحرک در هر لحظه را نشان می دهد. در لحظه صفر سرعت متحرک ٤ واحد است و در لحظه ٢ که متحرک تغییر جهت می دهد سرعت صفر است و در لحظه ٤ سرعت ٤- است که نشان می دهد جهت حرکت در جهت منفی است و اندازه سرعت ٤ است. متحرک حداکثر ٥ واحد با مبدا فاصله می گیرد و در این نقطه سرعت صفر است.

٤. الف) از نقطه ١/٥ حرکت شروع و به مبدا ختم شده است.
ب) در لحظه ١ که متحرک در مبدا بوده و در لحظه ٢ که متحرک در نقطه ٥ بوده و در لحظه ٤ که متحرک در نقطه ١/٥- بوده سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده است.
ج) در لحظات١ و ٥ در مبدا قرار گرفته است اما از مبدا رد نشده است. فقط در لحظه ٣ از مبدا رد شده است.
د) حداکثر فاصله در لحظه ٢ بوده است و در این لحظه ٣ متر تا مبدا فاصله داشته است.

پس از این تمرین در کلاس به فعالیتی می رسیم که هدف آن ارائه تفسیری از اندازه و علامت مشتق است.

حل فعالیت ششم

١. در هر دو لحظه سیب در ارتفاع $\frac{15}{4}$ متر از سطح زمین قرار دارد.
٢. داریم $x'(t) = -10t + 10 = 10(1-t)$ و در لحظات $t_1 = \frac{1}{2}$ و $t_2 = \frac{3}{2}$ سرعت به ترتیب ٥ و ٥- است. تفاوت علامت به خاطر تفاوت در جهت حرکت سیب است.
٣. زمانی که سیب رو به بالا حرکت می کند و ارتفاع در حال افزایش است علامت سرعت مثبت است و زمانی که سیب رو به پایین حرکت می کند و ارتفاع در حال کاهش است علامت سرعت منفی است.
٤. وقتی اندازه سرعت کم است تغییر ارتفاع (افزایش یا کاهش) نیز کم است ولی وقتی اندازه سرعت زیاد است تغییر ارتفاع (افزایش یا کاهش) نیز زیاد است

در ادامه، مطالب بالا که در زمینه فیزیکی دیده شده است مجددا در زمینه ریاضی تفسیر می شود و مفهوم اندازه و علامت مشتق توضیح داده می شود و در چند مثال دیده می شود.

آموزش فصل پنجم

حل فعالیت هفتم

۱. میزا ن افزایش مساحت برابر است با $S(2+h)-S(2)=\pi(2+h)^2-\pi 2^2=\pi(h^2+4h)$

۲. نسبت افزایش مساحت به افزایش شعاع برابر است با

$$\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=\frac{\pi(h^2+4h)}{h}=\pi(h+4)$$

۳. وقتی h به صفر نزدیک نزدیک شود مقدار بالا به 4π نزدیک می شود.

٤. عملیات بالا همان مشتق گیری از $S(r)$ در $r=2$ است. آهنگ تغییرات یک تابع همان مشتق تابع است.

در ادامه، این مطالب جمعبندی می شود و در یک مثال اقتصادی مفهوم آهنگ تغییرات بررسی می شود.

حل تمرین در کلاس ششم

۱. باید مساحت مربع را به صورت تابعی از محیط آن بنویسیم. مساحت مربع را با A و محیط مربع را با P نشان می دهیم. داریم $A=(\frac{P}{4})^2=\frac{1}{16}P^2$ ، بنابراین $A'(P)=\frac{1}{8}P$ و $A'(8)=1$.

۲. باید محیط مربع را به صورت تابعی از مساحت آن بنویسیم. داریم $P=4\sqrt{A}$، بنابراین $P'(A)=\frac{2}{\sqrt{A}}$ و $P'(4)=1$.

۳. آهنگ تغییرات مکان یک متحرک نسبت به زمان همان سرعت متحرک است.

حل مسائل

۱. باید محیط دایره را به صورت تابعی از مساحت آن بنویسیم. مساحت را با A و محیط را با P و شعاع را با R نشان می دهیم، داریم:

$$A=\pi R^2=\pi(\frac{P}{2\pi})^2=\frac{1}{4\pi}P^2 \Rightarrow P=2\sqrt{\pi A}$$

بنابراین $P'(A)=\frac{2\pi}{2\sqrt{\pi A}}=\sqrt{\frac{\pi}{A}}$ در نتیجه $P'(\pi)=1$.

۲. الف) باید شعاع بادکنک را به عنوان تابعی از زمان به دست آوریم. اگر حجم بادکنک(بر حسب سانتی متر مکعب) را با V و شعاع بادکنک(بر حسب سانتی متر) را با R و زمان(بر حسب ثانیه) را با t نشان دهیم داریم:

$$V(t)=4t\ ,\ V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 4t=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R(t)=\sqrt[3]{\frac{3t}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\sqrt[3]{t}$$

بنابراین $R'(t)=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9\pi t^2}}$

ب) مساحت سطح بادکنک(بر حسب سانتی متر مربع) را با S نشان می دهیم، داریم:

$$S=4\pi R^2\ ,\ R(t)=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\sqrt[3]{t} \Rightarrow S(t)=4\sqrt[3]{9\pi}t^{\frac{2}{3}}$$

بنابراین $S'(t)=4\sqrt[3]{9\pi}\times\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}=8\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}t^{-\frac{1}{3}}$

ج) باید شعاع بادکنک را به صورت تابعی از سطح آن بنویسیم و مشتق آن را حساب کنیم.

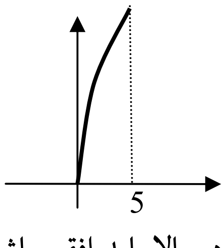
$$S=4\pi R^2 \Rightarrow R(S)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow R'(S)=\frac{1}{4\sqrt{\pi S}}$$

د) در لحظه ای که بادکنک می ترکد حجم آن 4500π سانتی متر مکعب است. شعاع آن به شکل زیر به دست می آید.

$$4500\pi=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow 3^3\times 5^3=R^3 \Rightarrow R=15$$

از آنجا که $S(R)=4\pi R^2$ داریم $S'(R)=8\pi R$ در نتیجه $S'(15)=8\pi\times 15=120\pi$.

۳. الف) دامنه اعتبار تابع $s(t)=25t-\frac{5}{2}t^2$ فقط تا لحظه ای است که ماشین متوقف می شود. سرعت ماشین به صورت $s'(t)=25-5t$ است و سرعت در $t=5$ صفر می شود. پس دامنه اعتبار تابع $[0,5]$ است.



(دقت رسم شکل کم است خط مماس بر منحنی در بالا باید افقی باشد)

ب) $s'(0)=25$، یعنی سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز ۲۵ متر بر ثانیه بوده است.

ج) سرعت پس از ۵ ثانیه صفر می شود.

د) $s(5)=25\times 5-\frac{5}{2}\times 5^2=62/5$، یعنی ماشین از لحظه ترمز پس از طی ٦٢/٥ متر موقف می شود.

٤. الف) فاصله ۳۰۰ متر بوده و پس از ۹ دقیقه به مدرسه رسیده است.

ب) در این مدت علی به طور یکنواخت حرک کرده است و ۱۰۰ متر را در ۲ دقیقه طی کرده است. پس سرعت ۵۰ متر بر دقیقه یا تقریبا ۸۰ سانتی متر بر ثانیه است.

ج) در دو دقیقه دوم تابع حرکت ثابت است و علی ایستاده است و احتمالا مشغول تماشای مغازه ای بوده است.

د) در دقایق بین ٤ و ٥ حرکت یکنواخت و در جهت عکس است و علی ۱۰۰ متر را در ۱ دقیقه طی کرده است. سرعت دو برابر حالت قبل است و علی می دویده است.

ه) در این دقایق علی در خانه بوده است و احتمالا چیزی جا گذاشته بوده است و به دنبال آن می گشته است.

و) علی در این مدت ۳۰۰ متر را در دو دقیقه طی کرده است و سرعت متوسط او ۱۵۰ متر بر دقیقه بوده است. احتمالا برای آن که دیرش نشد سوار تاکسی شده است. قسمت اول منحنی از دقیقه ۷ نشان می دهد سرعت در حال افزایش است و ماشین در حال گاز دادن است پس از مدتی سرعت ثابت می ماند و در نزدیکی مدرسه و لحظات قبل از دقیقه ۹ سرعت در حال کاهش است تا به صفر برسد و در این لحظات ماشین در حال ترمز بوده است.

ز) در این دقایق علی در مدرسه بوه است و احتمالا با دوستان خود منتظر شروع کلاسها بوده است.

ارزیابی یادگیری

هدف این بخش برقراری ارتباط بین مفهوم مشتق و مفاهیم سرعت متحرک و آهنگ تغییرات دو کمیت نسبت به هم است و دانش آموزان باید این ارتباط را درک کنند و از طریق آن با استفاده از مشتق مسائل مطرح شده نسبت به آنها را حل کنند و وضعیتهای پیش آمده را توضیح دهند. بنابراین ارزیابی باید مبتنی بر مسائلی باشد که نشان می دهد دانش آموزان تا چه اندازه این ارتباط را درک کرده اند و می توانند از این ارتباط در توضیح و توصیف موقعیتها استفاده کنند.

محدوده مطالب

هدف این قسمت دیدن مفهوم مشتق در چند زمینه مجزا و مهم است که موجب درک عمیقتر از مشتق می شود و دانش آموز را در بکارگیری مفهوم مشتق در حل مسائل عملی آموزش می دهد. بنابراین قرار نیست در این قسمت دانش آموز مسائل سخت فیزیکی و کاربردی را حل کند. ولی دانش آموز باید بتواند مفهوم مشتق را در زمینه های گوناگون شناسایی کند و از طریق مشتق چگونگی تغییرات و وابستگی ها را در این زمینه ها توضیح دهد.

نکات مهم

دیدن یک مفهوم ریاضی در زمینه های مختلف کمک زیادی به درک ماهیت ریاضی و اهمیت ریاضی در زندگی می کند. به ویژه هر مفهوم ریاضی مانند مشتق درزمینه های گوناگون معناهای گوناگون پیدا می کند. مشتق مفهوم مناسبی است که تعبیرات گوناگون آن در زمینه هندسه، حرکت، تغییرات کمیتها، توابع در اقتصاد،... می تواند رابطه ریاضی با سایر علوم مشخص کند.

بخشهای چهارم و پنجم: مشتق توابع مثلثاتی و تابع وارون و تابع مرکب

اهداف بخش

- آشنایی با مشتق توابع مثلثاتی
- آشنایی با مشتق تابع وارون و ترکیب دو تابع
- آشنایی با مشتق توابع وارون مثلثاتی و رادیکالی

نگاه کلی به بخش

این بخش با محاسبه مشتق توابع مثلثاتی مهم شروع می شود و در مثالهایی فرمولهای اصلی بیان می شوند. سپس در محاسبه مشتق تابع وارون از ویژگی هندسی قرینه هم بودن نمودار تابع و تابع وارون استفاده می شود و فرمول آن به دست می آید. به عنوان کاربرد مشتق توابع مثلثاتی وارون محاسبه می شوند. در آخرین قسمت با حدسیه سازی مشتق ترکیب تابع ارائه می شود و به صورت مستقیم بیان می شود و وارد اثبات آن نمی شویم.

ورود به مطلب

مستقیما می توان با طرح سوال مشتق تابع $\sin x$ چیست شروع کرد. ولی با حدسیه سازی از طریق حرکت تناوبی، مشتق آن را که باید مجددا تابعی متناوب و مثلثاتی باشد حدس می زنیم و با محاسبه حدس خود را ثابت می کنیم.

برای مشتق پذیری و محاسبه مشتق تابع وارون و طرح آن به عنوان یک مسئله، می توان از ویژگی هندسی نمودارهای تابع و تابع وارون استفاده کرد و با راهنمایی های مناسب، دانش آموزان را به

جواب رسانید. در مورد مشتق تابع مرکب نیز همانند کتاب می توان مثالهای خاص و نیمه کلی را بررسی کرد و در مورد آن حدسیه سازی کرد. البته قضیه اصلی بدون اثبات ارائه می شود.

فعالیت آموزشی

این بخشها بیشتر جنبه محاسباتی دارند و در این بخشها دانش آموزان با تعداد بیشتری از توابع مشتق پذیر و تکنیکهای دیگری برای محاسبه مشتق توابع آشنا می شوند. ابتدا مشتق تابع $\sin x$ مطرح می شود و با محاسبه مستقیم به دست می آید.

حل تمرین در کلاس هفتم

۱. به کمک قضیه مشتق تقسیم دو تابع مشتق تابع $\tan x$ را حساب می کنیم.

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۲. مانند بالا عمل می کنیم.

$$(\cot x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

۳. الف) مساحت مثلث(S) را به صورت تابعی از زاویه α ی نویسیم و مشتق آن را در α_0 حساب می کنیم

$$.S(\alpha) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin\alpha = 6\sin\alpha \Rightarrow S'(\alpha_0) = 6\cos\alpha_0$$

ب) $\cos\alpha_0$ برای زاویه های منفرجه منفی است. منفی بودن آهنگ تغییرات به معنای آن است که مساحت مثلث(با زاویه منفرجه α_0) با افزایش زاویه کاهش می یابد. (به کمک شکل، درستی این واقعه را نشان دهید)

ج) $\cos\alpha_0$ برای زاویه های حاده مثبت است. مثبت بودن آهنگ تغییرات به معنای آن است که مساحت مثلث (با زاویه حاده α_0) با افزایش زاویه، افزایش می یابد. (به کمک شکل، درستی این واقعه را نشان دهید)

د) $\cos\alpha_0$ در زاویه قائمه صفر است و در این زاویه افزایش زاویه موجب کاهش مساحت و کاهش زاویه نیز موجب کاهش مساحت است. یعنی مساحت مثلث در این زاویه بیشترین مقدار ممکن است.

مثالهای بعدی فقط تمرین در مشتق گیری از توابع مثلثاتی است.

آموزش فصل پنجم

حل مسائل

۱. در این مسائل فقط توانایی استفاده از قواعد مشتق گیری مورد ارزیابی قرار می گیرند. به ویژه دو قاعده زیر باید مورد استفاده قرار بگیرند.

$$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x) \quad , \quad (f(ax))' = af'(ax)$$

۲.

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}(-\sin(x+\frac{h}{2}))\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

۳. شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=\sin x$ را در $x=0$ حساب می کنیم.

$$y' = \cos x \;\Rightarrow\; y'(0) = \cos 0 = 1$$

بنابراین نمودار تابع $y=\sin x$ با زاویه ٤٥ درجه از مبدا رد می شود.

به طور مشابه برای تابع تانژانت نیز شیب خط مماس در مبدا برابر ۱ است و نمودار این تابع نیز با زاویه ٤٥ درجه از مبدا رد می شود.

٤. داریم $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$. خط مماس وقتی موازی محور xها است که شیب آن صفر باشد. معادله $3\cos 3x = 0$ دارای جوابهای $3x = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k عدد صحیح) است، یعنی نقاط به طول $x = \frac{2k+1}{6}\pi$ جواب مسئله هستند.

۵. باید ببینیم که آیا در نقطه ای از نمودار تابع شیب خط مماس برابر ۳ می شود؟ یعنی باید جوابهای معادله $y'(x)=3$ را بررسی کنیم.

$$y'(x) = \cos x - \sin x = 3$$

از آنجا که $|\sin x| \le 1$ و $|\cos x| \le 1$ سمت چپ تساوی حداکثر به ۲ می رسد. پس معادله جواب ندارد.

٦. باید ببینیم که $y'(x)$ چه مقدارهایی می تواند داشته باشد. داریم $y'(x) = 3(1+\tan^2 3x)$. از آنجا که مقدارهای $\tan^2 3x$ تمامی مقدارهای مثبت و صفر می تواند باشد برد $y'(x)$ بازه $[3,\infty)$ می باشد. بنابراین باید داشته باشیم $3 \le m$.

۷. می توانیم تابع حرکت را به شکل ساده تری بنویسیم.

$$x(t) = 1 + 2\sin^2 t = 1 + 1 - \cos 2t = 2 - \cos 2t$$

با رسم این تابع می توان دید که متحرک حول نقطه ۲ حرکت نوسانی دارد و حداکثر به اندازه ۱ واحد از نقطه ۲ دورمی شود. در لحظه صفر در نقطه ۱ قرار دارد و به سمت نقطه ۲ حرکت می کند و درلحظه $t=\frac{\pi}{4}$ به نقطه ۲ می رسد. از نقطه ۲ رد می شود و در لحظه $t=\frac{\pi}{2}$ به نقطه ۳ می رسد. در اینجا باز می گردد و مجددا (در لحظه $t=\frac{3\pi}{4}$) به نقطه ۲ می رسد و در ادامه به نقطه ۱(در لحظه $t=\pi$) برمی گردد. سپس این حرکت مجددا تکرار می شود.

برای یافتن جاهایی که متحرک ایست آنی دارد باید ببینیم در چه لحظاتی سرعت متحرک صفر می شود و در این لحظات کجا است. از طریق حرکت مشخص است در جاهایی که متحرک تغییر جهت می دهد باید ایست آنی کند و این نقاط ۱ و ۳ هستند. بررسی مشتق $x(t)$ نیز همین نقاط را نشان می دهد.

$$x'(t)=2\sin 2t=0 \Rightarrow 2t=k\pi \Rightarrow t=k\frac{\pi}{2}$$

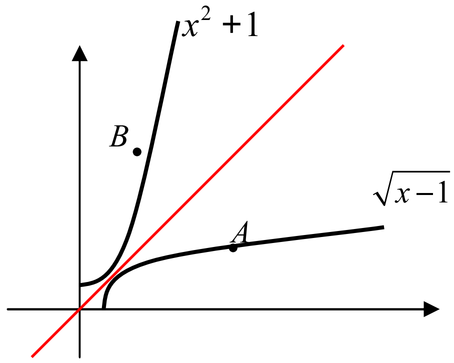
به ازای مقدارهای صحیح برای k مقدارهای $x(k\frac{\pi}{2})=2-\cos(k\frac{\pi}{2})$ برابر ۱ و ۳ می باشند.

بیشترین مقدار سرعت، از لحاظ اندازه، وقتی است که $\sin 2t=\pm 1$ و این در لحظات $t=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ رخ می دهد. بنابراین بیشترین سرعت از لحاظ اندازه ۲ است و در نقطه ۲ رخ می دهد.

بخش بعدی به مسئله یافتن مشتق تابع وارون می پردازد. ابتدا در یک فعالیت رابطه بین مشتق تابع و مشتق تابع وارون در یک مثال بررسی می شود.

حل فعالیت هشتم

۱.



۲. با توجه به قرینه بودن نمودارها (نسبت به نیمساز) خطها مماس در نقط نظیر نیز (نسبت به نیمساز) قرینه هم خواهند بود. با محاسبه داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(5)=\frac{1}{4}$$
$$g'(x)=2x \Rightarrow g'(2)=4$$

دیده می شود شیبها وارون یکدیگرند.

۳. با توجه به قرینه بودن دو نمودار (نسبت به نیمساز) می توان حدس زد در سایر نقاط هم همین رابطه برقرار شود. برای بررسی درستی این حدس برای دو نقطه دلخواه نظیر یکدیگر مانند $A(a\ ,\ \sqrt{a-1})$ و $B(\sqrt{a-1}\ ,\ a)$ می توانیم محاسبه مشابهی انجام دهیم.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$$
$$g'(x)=2x \Rightarrow g'(\sqrt{a-1})=2\sqrt{a-1}$$

در این حالت کلی هم شیبهای خط مماس وارون یکدیگرند.

نکته به دست آمده در فعالیت بالا در حالت یک تابع دلخواه جمعبندی می شود و قضیه مربوط به مشتق تابع وارون نتیجه گیری می شود.

حل تمرین در کلاس هشتم

۱. از آنجا که $f(x)=\sin x$ داریم $f'(x)=\cos x$ و باید $f'(\sin^{-1}x)$ را حساب کنیم. قرار می دهیم $\sin^{-1}x=\alpha$ بنابراین $\sin\alpha=x$. باید $f'(\sin^{-1}x)=\cos\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ مقدار $\cos\alpha$ مثبت یا صفر است و داریم:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$$

بنابراین

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نقاط $x=\pm1$ متناظر نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$ در تابع $\sin x$ است و مشتق این تابع در این نقاط صفر است. پس خط مماس بر نمودار تابع $\sin^{-1}x$ در نقاط $x=\pm1$ عمودی است و مشتق پذیری برقرار نیست.

۲. استدلالات برای تابع $\cos^{-1}x$ مشابه است. داریم $f'(x)=-\sin x$ و باید $-\sin(\cos^{-1}x)$ را حساب کنیم. قرار می دهیم $\cos^{-1}x=\alpha$ داریم $0\le\alpha\le\pi$ بنابراین $\sin\alpha$ مقداری مثبت یا صفر است و داریم:

$$\sin(\cos^{-1}x)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$$

در نتیجه

$$(\cos^{-1}x)' = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1}x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x = \pm 1$ با استدلال مشابه، خط مماس عمودی است و مشتق پذیری نداریم.

۳. مستقیما فرمول محاسبه مشتق تابع وارون را بکار می بریم.

$$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1+(\tan\tan^{-1}x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

پس از این تمرین در کلاس با ذکر چند مثال به مفهوم مشتق تابع مرکب می پردازیم. ابتدا در مورد نتیجه مشتق ترکیب دو تابع تاملاتی انجام می شود و سپس دریک فعالیت حالات ممکن بررسی می شود.

حل فعالیت نهم

۱. در این حالت داریم $f(x) = m_1 x$ و $g(x) = m_2 x$ و $f(g(x)) = m_1 m_2 x$. پس $f'(x) = m_1$ و $g'(x) = m_2$ و $f(g(x))' = m_1 m_2$. در این مثال خاص مشتق در همه نقاط مقدار ثابتی است و مشتق $f \circ g$ برابرحاصل ضرب مشتق f در مشتق g است.

۲. در این حالت $f(x)$ دلخواه است و $g(x) = m_2 x$. پس $f(g(x)) = f(m_2 x)$ و $g'(x) = m_2$ و $(f \circ g)'(x) = m_2 f'(m_2 x) = f'(g(x)).g'(x)$. بنابراین مشتق $f \circ g$ در نقطه x برابر است با حاصل ضرب مشتق f در نقطه $g(x)$ در مشتق g در نقطه x.

۳. در این حالت $f(x) = x^3$ و $g(x)$ دلخواه است. داریم $f(g(x)) = g(x)^3$ در نتیجه $f'(x) = 3x^2$ و $f(g(x))' = 3g(x)^2 g'(x)$. می توان نتیجه گرفت

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

نتایج به دست آمده از این فعالیت بدون اثبات کلی جمعبندی می شود و قضیه مشتق تابع مرکب بیان می شود و در چند مثال تمرین می شود.

حل تمرین در کلاس نهم

۱. $(\sin\frac{1}{x})' = \cos\frac{1}{x} \times \frac{-1}{x^2}$

۲. الف)

$$l^2 = 1^2 + 3^2 - 2\times 1\times 3\cos\alpha = 10 - 6\cos\alpha \Rightarrow l(\alpha) = \sqrt{10-6\cos\alpha}$$

بنابراین

$$l'(\alpha) = \frac{6\sin\alpha}{2\sqrt{10-6\cos\alpha}} = \frac{3\sin\alpha}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}$$

علامت آهنگ تغییرات مثبت است، یعنی با افزایش α مقدار l نیز افزایش می یابد.

ب) داریم $\alpha(l)=\cos^{-1}\frac{10-l^2}{6}$ توجه داشته باشید که $2\le l\le 4$. بنابراین

$$\alpha'(l)=\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{10-l^2}{6})^2}}\times\frac{-2l}{6}=\frac{2l}{\sqrt{6^2-(10-l^2)^2}}=\frac{2l}{\sqrt{(16-l^2)(l^2-4)}}$$

آهنگ تغییرات مثبت است، یعنی با افزایش l مقدارهای α افزایش می یابند.

ج) با توجه به آن که این دو تابع وارون یکدیگرند مشتقهای آنها در نقاط متناظر وارون یکدیگر خواهند بود. درستی این مطلب را می توان تحقیق کرد. در فرمول $\alpha'(l)$ قرار می دهیم $l=\sqrt{10-6\cos\alpha}$ حاصل باید وارون $l'(\alpha)$ باشد.

$$\alpha'(l)=\frac{2l}{\sqrt{(16-l^2)(l^2-4)}}=\frac{2\sqrt{10-6\cos\alpha}}{\sqrt{(16-10+6\cos\alpha)(10-6\cos\alpha-4)}}$$
$$=\frac{2\sqrt{10-6\cos\alpha}}{\sqrt{(6+6\cos\alpha)(6-6\cos\alpha)}}=\frac{2\sqrt{10-6\cos\alpha}}{6\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{10-6\cos\alpha}}{3\sin\alpha}$$

حل مسائل

۱. این مسائل فقط ارزیابی بکارگیری قاعده مشتق تابع مرکب است.

۲. طبق تعریف مشتق عمل می کنیم.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

می دانیم حد بالا موجود نیست، پس تابع f در صفر مشق پذیر نیست.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

بنابراین تابع g در صفر مشتق پذیر است.

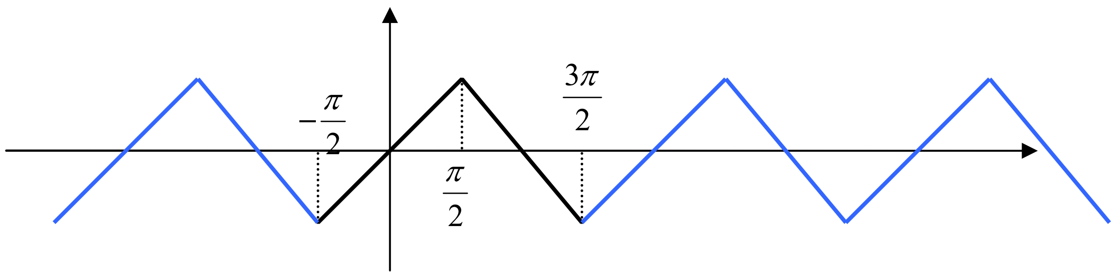
۳. در مورد تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ توجه داشته باشید $\sin x$ همان تابع سینوس معمولی است که دامنه آن تمام $\mathbb{R}$ است و $\sin^{-1}x$ وارون تابع سینوسی است که دامنه آن به بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ محدود شده است. بنابراین در اینجا ما با ترکیب یک تابع و وارون آن روبرو نیستیم تا نتیجه تابع همانی باشد. برای xهایی که در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ هستند ما با ترکیب یک تابع و وارون آن روبرو هستیم و حاصل همان تابع همانی است. بنابراین

$$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow \sin^{-1}(\sin x)=x$$

اگر $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ داریم $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ بنابراین $\sin^{-1}(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ از طرف دیگر $\sin^{-1}(\sin(\pi - x)) = \sin^{-1}\sin x$ بنابراین

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}(\sin x) = \pi - x$$

بنابراین نمودار این تابع در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ به شکل زیر است.



این تابع متناوب با دوره تناوب 2π است، زیرا

$$f(x+2\pi) = \sin^{-1}(\sin(x+2\pi)) = \sin^{-1}(\sin x) = f(x)$$

بنابراین برای رسم کامل نمودار این تابع کافی است نمودار رسم شده در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ را به دو طرف به اندازه مضارب صحیح 2π منتقل کنیم.

شکل نشان می دهد که این تابع در نقاط به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ مشتقهای چپ و راست متفاوت دارد و در سایر نقاط مشتق ۱ یا ۱− دارد.

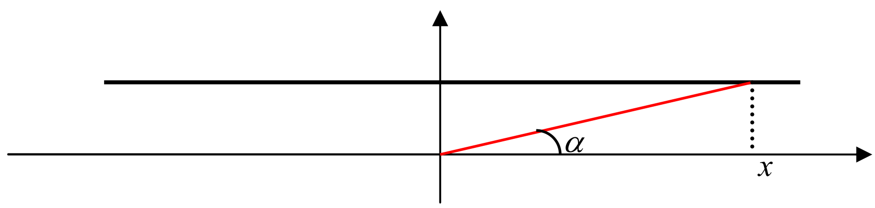
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & (4k-1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ -1 & (4k+1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+3)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

البته محاسبه مستقیم مشتق نیز همین نتیجه را در بر دارد.

$$(\sin^{-1}(\sin x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} \times (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

مقدار بالا ۱ یا ۱− است.

٤. برای درک بهتر مسئله شکل آن را رسم می کنیم.



داریم $\tan\alpha = \frac{1}{x}$ ولی بهتر است از تابع کتانژانت استفاده کنیم زیرا این فرمولبندی در $x=0$ قابل قبول نیست و در xهای منفی جواب قابل قبول نمی دهد. داریم $\cot\alpha = x$ و در نتیجه $\alpha = \cot^{-1} x$. برای همه مقادیر x این تساوی جواب درست را می دهد. دامنه این تابع تمام

$I\!R$ و برد آن بازه $(0,\pi)$ است. داریم $\alpha'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$. از روی شکل دیده می شود که افزایش x موجب کاهش α است و علامت مشتق نیز همواره منفی است.

۵. این مسئله تکراری است و در تمرین در کلاسها آمده است و بعدا تغییر خواهد کرد.

٦. الف) مساحت مثلثی که در شکل دیده می شود برابر است با $\frac{1}{2}\sin\alpha$ و مساحت این قطاع از دایره برابر است با $\frac{1}{2}\alpha$ بنابراین $S=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)$.

همچنین رابطه کسینوسها در این مثلث نتیجه می دهد

$$l^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\alpha=2(1-\cos\alpha)\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}(1-\frac{l^2}{2})$$

برای محاسبه S بر حسب l از ترکیب توابع استفاده می کنیم. از آنجا که $\cos\alpha=1-\frac{l^2}{2}$ و α زاویه ای در بازه $[0,\pi]$ است، سینوس آن مثبت یا صفر است و داریم:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(1-\frac{l^2}{2})^2}=\sqrt{l^2-\frac{l^4}{4}}=l\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}$$

بنابراین

$$S=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}(\cos^{-1}(1-\frac{l^2}{2})-l\sqrt{1-\frac{l^2}{4}})$$

ب)

$$S'(\alpha)=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\alpha'(l)=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-\frac{l^2}{2})^2}}\times(-l)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}}$$

$$S'(l)=S'(\alpha(l))\alpha'(l)=\frac{1}{2}(1-(1-\frac{l^2}{2}))\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}}=\frac{l^2}{2\sqrt{4-l^2}}$$

ارزیابی یادگیری

هدف این قسمت بالا بردن توانایی محاسباتی در محاسبه مشتق توابع بوده است ولی در اینجا دانش آموزان باید بتوانند با این توانایی مسائل بیشتری را که مفهوم مشتق در آن وجود دارد حل کنند. بنابراین در اینجا که آخرین بخش این فصل است لازم است دانش آموزان بتوانند مسائلی که مستقیم یا غیر مستقیم به مشتق ارتباط دارند تجزیه و تحلیل کنند و با ابزار مشتق گیری حل کنند.

آموزش فصل پنجم

محدوده مطالب

هدف این قسمت آشنایی با مشتق توابع خاص مثلثاتی و چند قضیه مهم مشتق تابع وارون ومشتق توابع مرکب است. با این قضایا دانش آموز توانایی محاسبه مشتق اکثر توابع را خواهد داشت، با اینحال وارد مشتق توابع در هم پیچیده نشوید و حداکثر از مسائلی استفاده کنید که با بکارگیری صریح و مستقیم این قضایا بتوان محاسبه را انجام داد.

نکات مهم

معمولا مشتق تابع وارون از طریق مشتق توابع مرکب گفته می شود، ولی ما در این کتاب از روش هندسی استفاده کرده ایم. توجه داشته باشید که معمولا آموزش و ارائه مفاهیم راه ثابت و یکتا ندارند و ممکن است راههای متعددی برای آموزش مفاهیم وجود داشته باشد. خوب است در حل مسائل به راه حلهای متعدد توجه کنید و دانش آموزان را ترغیب کنید که به دنبال راه حلهای جدید و آسانتر باشند.

سوالات نمونه ای فصل چهارم

برخی از مسائل زیر ممکن است برای برخی دانش آموزان مشکل باشند. با توجه به سطح دانش آموزان مخاطب خود می توانید از این مسائل انتخاب کنید و آنها را ساده تر یا مشکلتر کنید.

۱. از طریق هندسی و با استفاده از تقارنهای توابع زوج و فرد نشان دهید مشتق یک تابع زوج تابعی فرد و مشتق یک تابع فرد تابعی زوج است. همین نتیجه را با روش محاسباتی و جبری ثابت کنید.

۲. با روش جبری ثابت کنید خط مماس بر یک دایره، بر شعاع دایره که از نقطه تماس می گذرد عمود است.

۳. نشان دهید تابع $f(x)=\sin^{-1}(\cos x)$ روی تمام $I\!R$ تعریف شده است و متناوب است. با محاسبه مشتق این تابع (در نقاطی که مشتق پذیر است) نشان دهید مشتق آن ۱ یا ۱− است. نشان دهید $f(x)$ منتقل شده تابع $\sin^{-1}(\sin x)$ به اندازه $-\frac{\pi}{2}$ است.

٤. تابع $y=x^3-x^2-5x+1$ را در نظر بگیرید.

الف)در کدام نقاط مماس بر نمودار این تابع موازی محور xها است.

ب) در چه بازه هایی این تابع صعودی و در چه بازه هایی نزولی است.

ج) نمودار تابع را به طور تقریبی رسم کنید.

د) معادله $x^3-x^2-5x+1=0$ چند جواب دارد.

۵. تابع $f(x)=x-\sin x$ را در نظر بگیرید.

الف) در چه نقاطی مشتق f صفر می شود؟

ب) f صعودی است یا نزولی یا هیچکدام؟

ج) نمودار تقریبی f را رسم کنید.

د) معادله $x=\sin x$ چند جواب دارد؟

٦. نموداری برای تابع $x(t)$ به گونه ای رسم کنید که نشان دهنده متحرکی باشد که روی محور xها در بازه زمانی $[0,8]$ به شکل زیر حرکت کند.

«در لحظه صفر از نقطه ۱ به سمت مبدا حرکت می کند و پس از ۲ واحد زمانی به مبدا می رسد. در مبدا، ۱ واحد زمانی می ایستد و سپس مجددا در جهت منفی حرکت می کند و پس از ۲ واحدزمانی به نقطه ٤- می رسد و بلافاصله به عقب برمی گردد و در جهت مثبت حرکت می کند و پس از سه واحد زمانی به نقطه ۱ برمی گردد و در آنجا می ایستد.»

طبق نموداری که رسم کرده اید در چه بازه هایی سرعت متحرک در حال افزایش است و در چه بازه هایی سرعت متحرک ثابت است و در چه بازه هایی سرعت متحرک در حال کاهش است.

۷. از نقطه $P(-1,2)$ خطی رسم می کنیم که با محور xها زاویه حاده θ بسازد. این خط محور xها را در نقطه A و محور yها را در نقطه B قطع می کند.

الف) طول پاره خط AB را به صورت تابعی از θ بنویسید.

ب) آهنگ تغییرات طول پاره خط AB نسبت به θ را به دست آورید.

ج) در چه زاویه ای آهنگ تغییرات صفر است؟ در چه بازه ای افزایش θ موجب افزایش AB می شود؟ در چه بازه ای افزایش θ موجب کاهش AB می شود؟

د) کمترین مقدار AB چقدر است؟

۸. از بالای یک آسمانخراش ۳۰۰ متری سنگی رها شده است و ارتفاع آن از سطح زمین در هر لحظه t برابر است با $h(t)=-5t^2+300$.

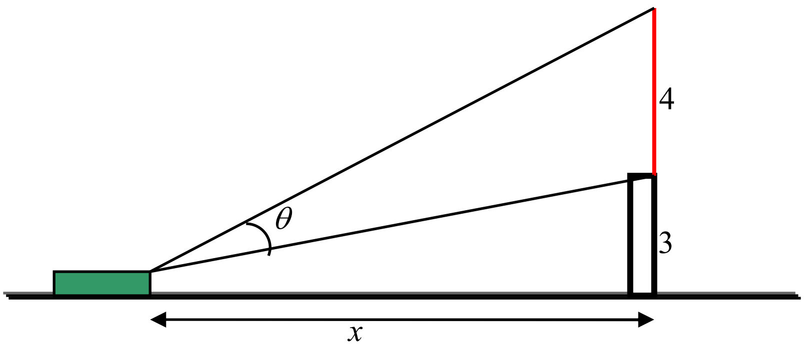
الف) دامنه اعتبار این تابع و برد آن را مشخص کنید.

ب) با یک دوربین نقشه برداری که در فاصله ۵۰ متری از آسمانخرش است، سقوط این سنگ در هر لحظه رصد می شود. زاویه ای که دوربین با زمین می سازد را به صورت تابعی از

ارتفاع سنگ بنویسید. . زاویه ای که دوربین با زمین می سازد را به صورت تابعی از زمان بنویسید.

ج) آهنگ تغییرات زاویه دوربین نسبت به ارتفاع سنگ را به دست آورید. آهنگ تغییرات زاویه دوربین نسبت به زمان را به دست آورید.

۹. در اتوبانی یک تابلوی ٤ متری روی یک دکل ۳ متری نصب شده است. راننده یک ماشین که از سطح زمین یک متر فاصله دارد، این تابلو را تحت زاویه θ می بیند. این زاویه تابعی از فاصله ماشین تا دکل تابلو است.



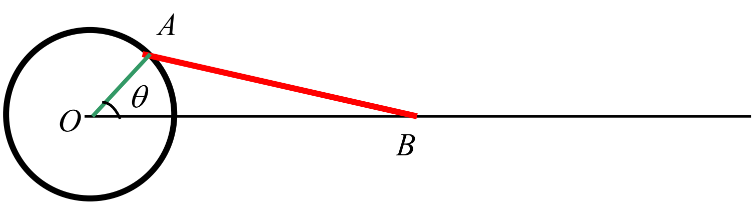
الف) θ را به صورت تابعی از x بنویسید و آهنگ تغییرات θ را نسبت به x به دست آورید.

ب) از روی شکل توضیح دهید که وقتی ماشین دور است زاویه θ کوچک است و با کم شدن x زاویه بزرگ می شود. توضیح دهید θ از جایی به بعد با کم شدن x کوچک می شود.

ج) روند تغییرات θ را از طریق مشتق θ توضیح دهید.

د) در چه مقداری از x مشتق θ صفر است؟ بیشترین مقدار θ چقدر است؟

۱۰. طبق شکل چرخی به شعاع یک مترحول مرکز آن (نقطه O) در حال چرخیدن است و به یک نقطه(A) از محیط آن میله ای به طول ۳ متر لولا شده است. سر دیگر میله (نقطه B)روی یک محور طبق شکل می لغزد.



الف) طول OB را به عنوان تابعی از θ به دست آورید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

ب) اگر چرخ به طور یکنواخت ۵ دور در دقیقه بچرخد نقطه B چه حرکتی روی محور انجام می دهد و در چه نقاطی سرعت آن صفر می شود. در چه نقاطی سرعت آن بیشترین است؟

۱۱. در میان قوطی های استوانه ای شکل که حجم آنها ثابت ۳۰۰ سانتی متر مکعب است ارتفاع آنها تابعی از شعاع قاعده آنها است.

الف) سطح جانبی این قوطیها (به همراه مساحت دو قاعده آن) را با S نشان می دهیم. S را به صورت تابعی از شعاع قاعده استوانه بنویسید.

ب) چگونگی تغییرات افزایشی یا کاهشی سطح جانبی استوانه را بر حسب افزایش شعاع قاعده به دست آورید.

ج) کمترین مقدار سطح جانبی استوانه در چه شعاعی اتفاق می افتد و چقدر است؟

۱۲. اگر f تابعی باشد که در اطراف نقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه پیوسته باشد نشان دهید که مماس بودن خط $y = mx + b$ بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ معادل با آن است که

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (mx + b)}{x - a} = 0$$