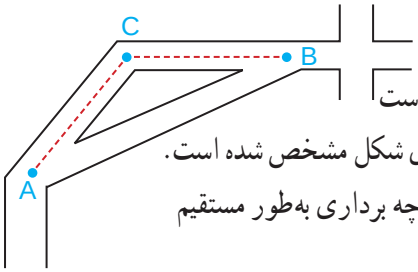
فصل ۴

بردار ومختصات

از بردارها برای مشخص کردن نیروهایی که بر یک جسم وارد می‌شود استفاده می‌کنند.
تحلیل و بررسی برآیند این بردارها در حالت تعادل کمک می‌کنند. تا مهندسان سازه‌های مختلف را طراحی و پیاده‌سازی کنند. در تصاویر بالا نیروهایی که به برخی از قسمت‌ها وارد شده است با بردار نمایش داده شده است.

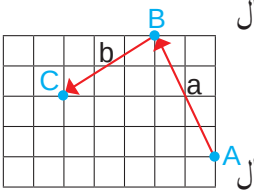
فعالیت



۱ــ شخصی درنقطه‌ی A ایستاده است

مسیرحرکت این شخص برای رسیدن به نقطه B روی شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به‌طور مستقیم به نقطه B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

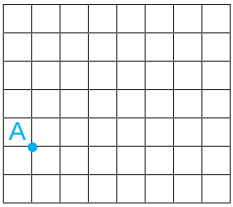


۲ــ نقطه‌ی A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه‌ی B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است.

نقطه‌ی A با چه برداری به‌طورمستقیم به نقطه‌ی C منتقل شده است.

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توان گفت بردار c کار دو بردار انتقال a و b انجام می‌دهد؟

به بردار c بردار برآیند یا حاصل جمع می‌گویند.



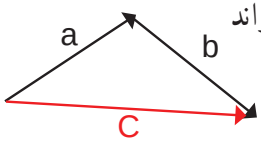
۳ــ یک روبات فقط به‌صورت افقی و یا عمودی حرکت می‌کند.

در حال حاضر روی نقطه‌ی A است.با فرمان $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا ۴ واحد به سمت راست افقی و سپس ۲ واحد به سمت بالای عمودی حرکت می‌کند.

نقطه‌ی جدید را B نام‌گذاری کنید.

این روبات با فرمان بعدی $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ به نقطه‌ی C می‌رسد.

با چه دستوری مستقیم از نقطه‌ی A به C می‌رسد؟



۴ــ دو بردار a و b چه ویژگی و خصوصیتی دارند که بردار c می‌تواند برآیند یا حاصل جمع آنها باشند؟

بردار c چگونه رسم می‌شود.

در فعالیت بالا مشاهده کردید نتیجه جمع دو بردار a و b ، بردار c است. بنابراین می‌توان تساوی برداری به‌صورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ را نوشت.

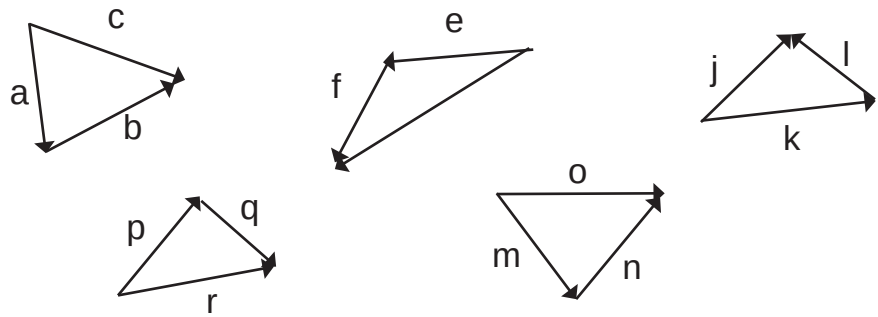
بین مختصات آنها رابطه‌ی جمع برقرار است و می‌توان یک تساوی مختصاتی نوشت :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

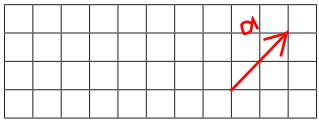
کار در کلاس

در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به‌صورتی باشند که ابتدای b، انتهای a قرارگیرد در این صورت برای رسم حاصل جمع یابرآیند آن دوبردارمی توان از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کرد.

برای شکل‌های زیر یک جمع برداری بنویسید.

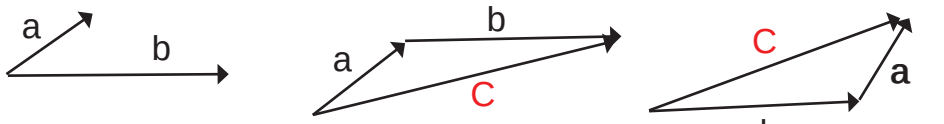


فعالیت



۴ــ بردار مساوی بردار a رارسم کنید و مختصات تمام بردارها را بنویسید.

۲ــ با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان با نقاط شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردار را a و b رارسم کنیم. روش‌های مختلفی که توسط دو دانش‌آموز نوشته شده را توضیح دهید.



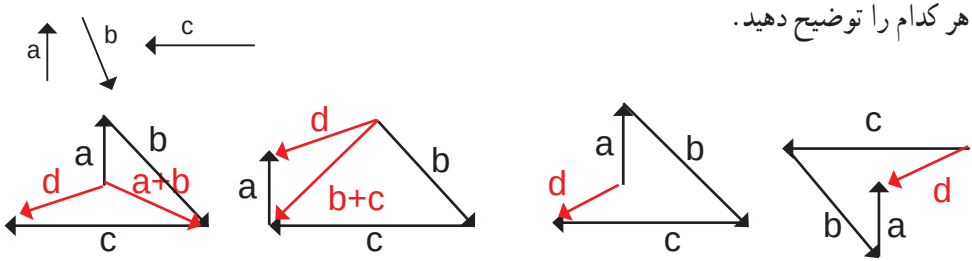
روش امیر

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

روش رضا

$\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$

۳ــ در زیر راه حل‌های دانش‌آموزان را برای پیدا کردن جمع ۳ بردار مشاهده می‌کنید. راه حل هر کدام را توضیح دهید.



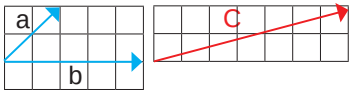
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ روش سعید

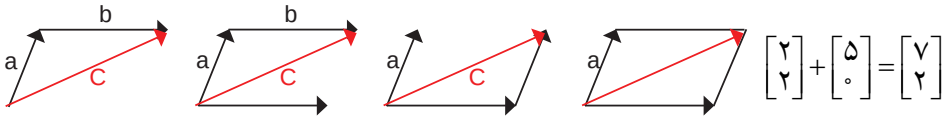
$(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$ روش محمد

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ روش حمید

$\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}$ روش رضا

۴ــ راه حل ۵ دانش‌آموز را برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b مشاهده کنید. روش‌ها را باهم مقایسه کنید.



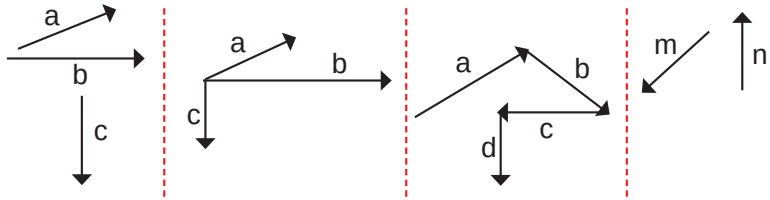


$\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\۲\end{bmatrix}$

روش فاطمه — روش زهرا — روش سارا — روش مریم — روش سمانه

کار در کلاس

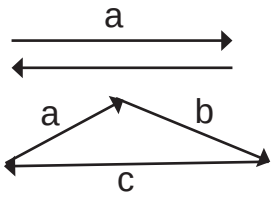
۱ــ حاصل جمع بردارهای زیر را از هر روشی که دوست دارید رسم کنید.



۲ــ جمع دو بردار قرینه برابر بردار صفر می‌شود.

بردارصفر را به صورت $\vec{O}$ نشان می‌دهیم.

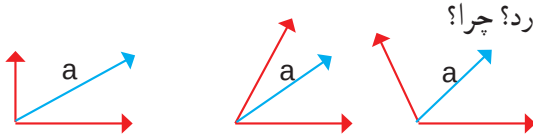
حاصل جمع بردارهای a، b، cچیست؟ چرا؟



فعالیت

دو بردار دلخواه رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه بردار می‌گویند.

چند پاسخ مختلف می‌توان به‌دست آورد؟ چرا؟



۲ــ دو بردار بنویسید که حاصل جمع آن‌ها بردار $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ باشد.

چند پاسخ مختلف می‌توان نوشت؟

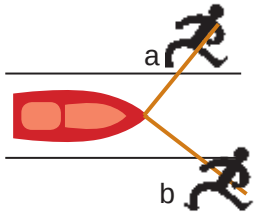
۳ پاسخ مختلف بنویسید.

$$\begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

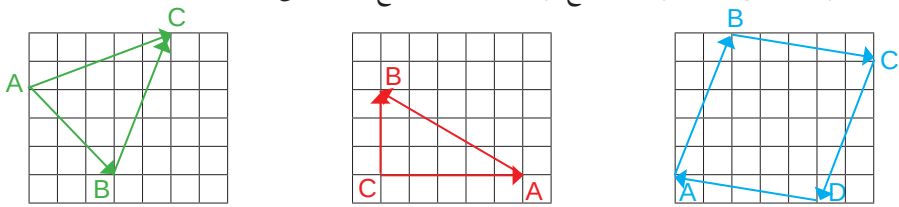
تمرین

۱ــ دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب قایق را خلاف جهت آب می‌کشند قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟

اگر نیروی a بیشتر باشد قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟



۲ــ برای شکل‌های زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید؟



۳ــ حاصل جمع‌ها را به‌دست آورید؟

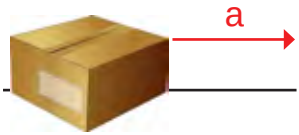
$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۶ \\ ۰ \end{bmatrix} =$$

۴ــ x و y را در هر تساوی به‌دست آورید؟

$$\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۶ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x+۱ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ y-۱ \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در بردار

فعالیت

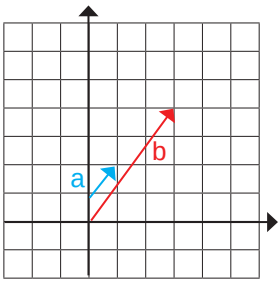


۱ــ یک جعبه را با یک طناب می‌کشیم. نیروی وارد بر این جسم با بردار a نشان داده شده است. اگر شخص با نیروی دو برابر جعبه را بکشد، بردار نیروی جدید را رسم کنید.

۲ــ یک ماشین روی جاده حرکت می‌کند. بردار حرکت آن رسم شده است. اگر این ماشین مسافتی سه برابر مقدار کنونی در همان جهت حرکت کرده باشد، بردار حرکت جدید را رسم کنید.

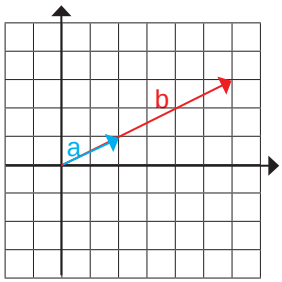
۳ــ در سؤال‌های ۱ و ۲ در هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه آن چه نکاتی را رعایت کردید؟

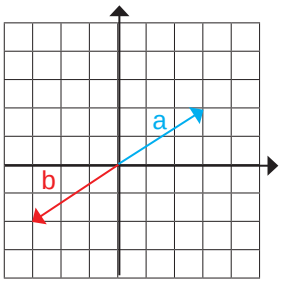
۴ــ در هر شکل مختصات بردارهای a و b را بنویسید. رابطه‌ی بین دو بردار a و b را با یک تساوی برداری و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

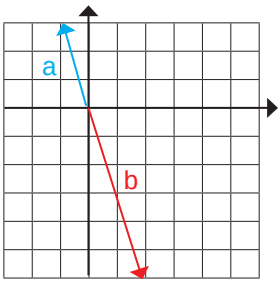


$\vec{b} = ۲\vec{a}$

$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = ۲ \times \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$







$\vec{b} = -۲\vec{a}$

$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = -۲ \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

در ضرب یک عدد در بردار آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

اگر بردار b قرینه‌ی بردار a باشد، می‌نویسیم : $\vec{b} = (-۱)\vec{a}$ یا $\vec{b} = -\vec{a}$

کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.

$\vec{x}$ $y=-\frac{۳}{۲}x$

$\vec{a}$ $\vec{b}=\frac{۱}{۲}\vec{a}$

$\vec{x}$ $y=-۲\vec{x}$

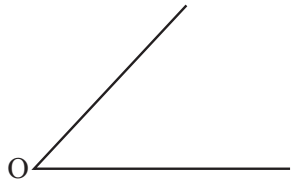
$\vec{a}$ $\vec{b}=۳\vec{a}$

فعالیت

۱ ــ بردارهای a و b مفروض اند.

بردار c=۲a+۳b را رسم کنید.

$\vec{b}$ $\vec{a}$



از نقطه‌ی دلخواه O بردارهای ۲a و ۳b را رسم و سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

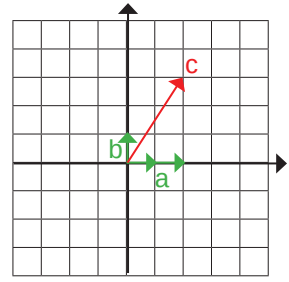
۲ــ مانند سؤال بالا بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

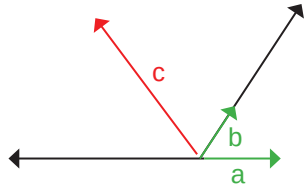
$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}=۳x+۲y$

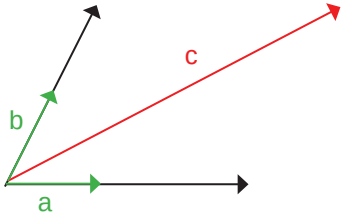
$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}=۲\vec{a}-۳\vec{b}$

کار در کلاس

در هر یک از شکل‌های رسم شده، بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.

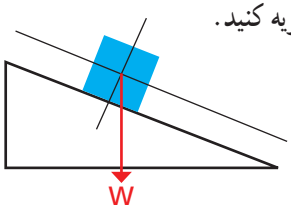




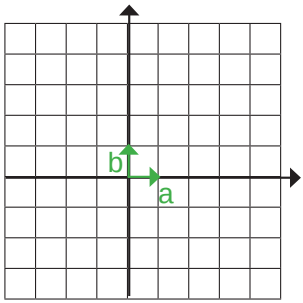


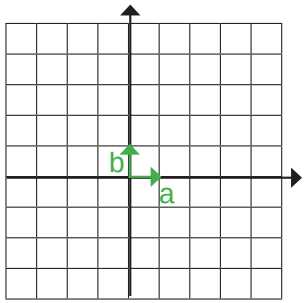
تمرین

۱ــ در شکل مقابل نیروی وزن جعبه که روی یک سطح شیبدار قرار گرفته نشان داده شده است. روی دو امتداد رسم شده این بردار را تجزیه کنید.



۲ــ با توجه به بردارهای a و b بردارهای c و d را رسم کنید.





$c=۳a+۳b$ $\quad$ $d=(-۲)a+۳b$

$c=۴a-۲b$ $\quad$ $d=-۴a+b$

$c=-۳a-۲b$

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(-۱)\begin{bmatrix}۳\\۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\۵\end{bmatrix}=$$

$$(-۴)\begin{bmatrix}-۵\\۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}=$$

$$(-۲)\begin{bmatrix}۱۱\\-۸\end{bmatrix}+۶\begin{bmatrix}۷\\۳\end{bmatrix}=$$

۴ــ معادله‌های برداری زیر را حل کنید.

$$۴x=\begin{bmatrix}۱۲\\-۸\end{bmatrix}$$

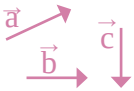
$$-۳x=\begin{bmatrix}۱۵\\-۹\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-۴\\۶\end{bmatrix}$$

۵ــ با توجه به بردارهای a و b ، مختصات بردار c را به‌دست آورید.

$a=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ $\quad$ $a=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ $\quad$ $a=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$

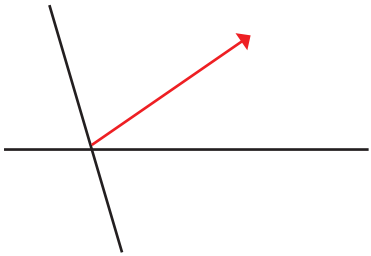


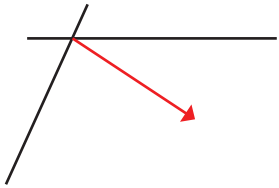
c=−۳a+۴b $\quad$ c=۲a+۳b $\quad$ c=a−۲b=

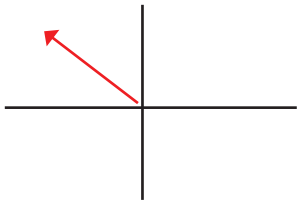
۶ــ با توجه به بردارهای a و b و c ، بردار d را رسم کنید.

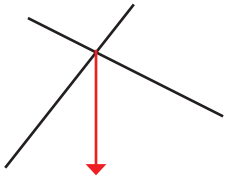
d=۲a−b+۳c $\quad$ d=a+b−c

۷ــ بردارهای داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.









فعالیت

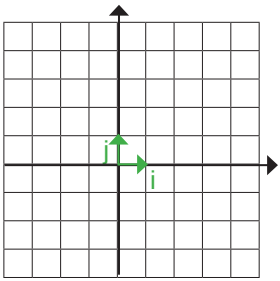
۱ــ برای اندازه گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می کنیم؟

طول : جرم : دما : زاویه : زمان :

۲ــ در محور زیر، واحد نشان داده شده است. نقطه هایی که نشان دهنده‌ی اعداد ۲ و ۱ــ باشد را مشخص کنید.

۳ــ همانطور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه‌ی مختصات نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.

در شکل زیر بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده است.

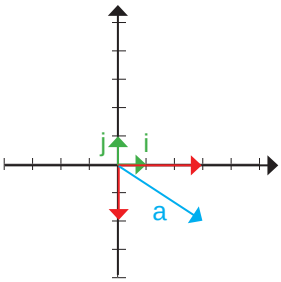


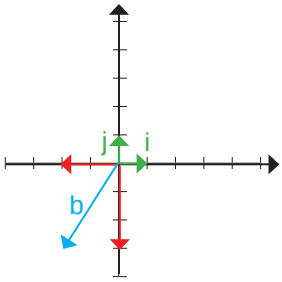
- مختصات بردارهای واحد را بنویسید. $i=\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$, $j=\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
- بردار $a=۴i+۲j$ را رسم کنید :
- مختصات بردار a را بنویسید.
- مختصات بردار a را از رابطه‌ی مقابل به‌دست آورید.

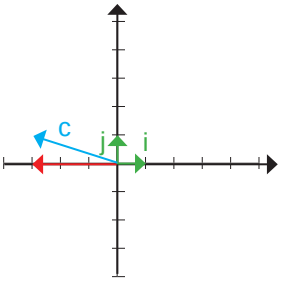
$$a=۴i+۲j=۴\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}=$$

کار در کلاس

در هر قسمت بردار داده شده را بر حسب i و j و یک بار هم به صورت مختصاتی بنویسید.







فعالیت

۱ــ مانند نمونه طرف دیگر تساوی را کامل کنید.

$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۲i + ۳j$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} =$

$i+j=$ $\qquad$ $۲i-j=$ $\qquad$ $۲-۳j=$ $\qquad$ $۳i=$

۲ــ معادله‌ی برداری زیر توسط دو دانش‌آموز حل شده است. مراحل حل آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

روش سعید	روش حمید
$۳i + j + ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$	$۳i + j + ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} + ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$	$۳i+۲\vec{x}+j=-۵i+j$
$۲\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$	$۲\vec{x}=-۵j+۳i-j-j$
$۲\vec{x} = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$۲\vec{x}=-۸i$
$\vec{x} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$\vec{x}=-۴i$

۳ــ حالا شما معادله‌های برداری زیر را حل کنید. روش مورد نظر خود را انتخاب کنید.

$۲i - j + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix} - ۲\vec{x} = i - j$

کار در کلاس

اگر $a=۳i-۲j$ و $b=۲i+j$ باشد، مختصات بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ را به‌دست آورید.

$\vec{x} = ۵a + ۳b$ $\qquad$ $\vec{y} = -۳a + ۴b$

تمرین

۱ــ طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید.

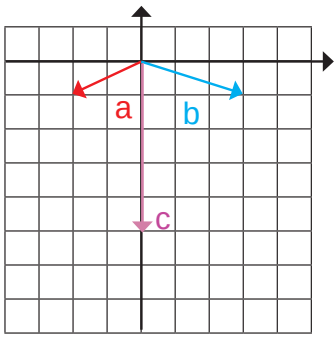
$a=\begin{bmatrix}۳\\۷\end{bmatrix}=$ $\quad$ $b=\begin{bmatrix}\ \\ \ \end{bmatrix}=-۲i+۵j$ $\quad$ $c=\begin{bmatrix}\ \\ \ \end{bmatrix}=۳i-۲j$

$d=\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}=$ $\quad$ $e=\begin{bmatrix}-۵\\۰\end{bmatrix}=$ $\quad$ $f=\begin{bmatrix}\ \\ \ \end{bmatrix}=-۲j$

۲ــ دو محور عمود برهم رسم کرده و بردارهای واحد مختصات را روی آن‌ها مشخص کنید.
اکنون بردارهای زیر را روی آن رسم کرده و هر بردار را به صورت i و j بیان کنید.

$a=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ $\quad$ $b=\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ $\quad$ $c=\begin{bmatrix}۵\\-۱\end{bmatrix}$ $\quad$ $d=\begin{bmatrix}-۶\\-۴\end{bmatrix}$

۳ــ با توجه به شکل روبرو، مختصات بردار c را با دو روش پیدا کنید.



۱) با رسم شکل و نوشتن مختصات c از روی شکل

۲) با پیدا کردن مختصات a و b و قرار دادن در تساوی زیر :

c=۳a+۲b

مزایا و معایب هر روش را بیان کنید.

کدام روش برای رایانه ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟

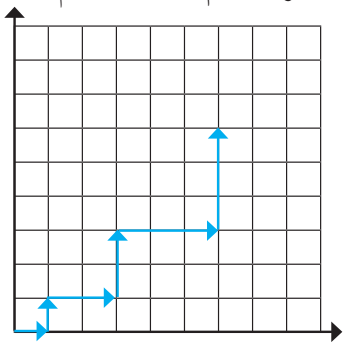
۴ــ با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

+ طول		−		+		−
+ عرض		+		−		−

۵ــ اگر $a=۲i-۳j$ و $b=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد از معادله‌ی زیر بردار $\vec{x}$ را پیدا کنید.

$$۲\vec{x}-j=۲a-b$$

۶ــ یک روبات برنامه‌ریزی شده و به صورت مقابل از مبدأ مختصات حرکت می‌کند.
الگوی حرکت روبات را کشف کنید و توضیح دهید. پس از حرکت دهم، روبات به کدام نقطه می‌رسد؟



مرور فصل

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر بکار رفته‌اند. مطمئن شوید می‌توانید با جملات خود آن‌ها را توصیف کنید. و برای هر کدام یک مثال بزنید.

ــ جمع (برآیند) بردارها　　تجزیه بردار　　ضرب عدد در بردار

بردارهای واحد مختصات

در این فصل واژه‌های اصلی زیر مطرح شده است. با یک مثال هرکدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید .

- با تشکیل مثلث جمع دو بردار را به دست آورید.
- با تشکیل متوازی الاضلاع جمع دو بردار را پیدا کنید.
- جمع برداری و جمع مختصاتی بنویسید.
- یک عدد را در بردار ضرب کنید.
- بردارهای ترکیبی را رسم کنید.
- مختصات بردارهای ترکیبی را پیدا کنید.
- یک بردار را به دو بردار تجزیه کنید.
- مختصات بردار را با بردارهای واحد مختصات بنویسید.
- بردارهای واحد مختصات را به صورت مختصاتی نمایش دهید.
- معادله‌های برداری را حل کنید.

کاربرد

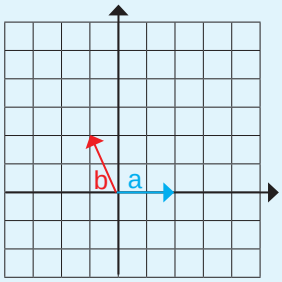
این فصل در درس‌های علوم (فیزیک ــ مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد. ضمن آن که در شاخه‌ای از ریاضیات به نام جبر خطی فضای برداری مطرح می‌شود که با کمک آن مسائل مختلف ریاضی و فیزیک حل می‌شود.

تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱ــ با توجه به بردارهای a و b و c، بردار d را رسم کنید.　　$d=۲a-b+۳c$

۲ــ اگر $a=i-j$ و $b=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ باشد مختصات بردار $\vec{x}$ را پیدا کنید.　　$۲a-b=۳\vec{x}$

۳ــ با توجه به شکل مختصات بردار c را پیدا کنید.

$\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}$