



دایره‌ها

.....



O.

۱- چند نقطه می‌توانید پیدا کنید

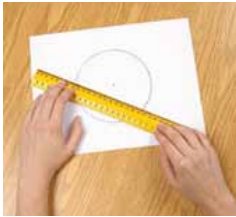
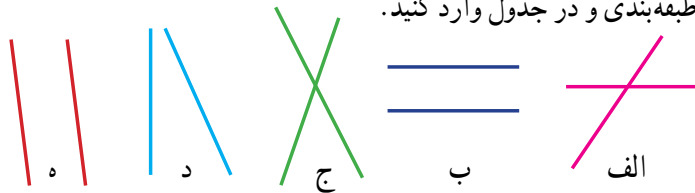
که فاصله هر کدام از نقطه O برابر ۲ سانتی متر باشد؟

چگونه می‌توانید همه‌ی این نقاط را پیدا کنید؟

۲- در شکل‌های زیر وضعیت‌های مختلف دو خط را مشاهده می‌کنید. آنها را در دو قسمت

طبقه‌بندی و در جدول وارد کنید.

وضعیت	نام شکل
\neq	



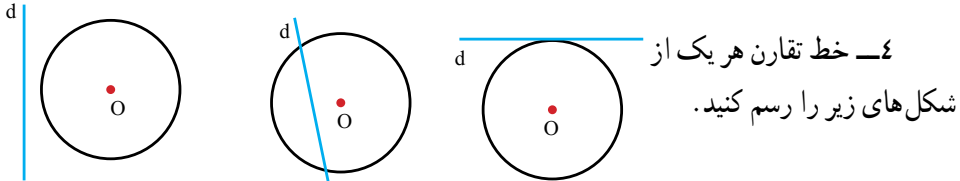
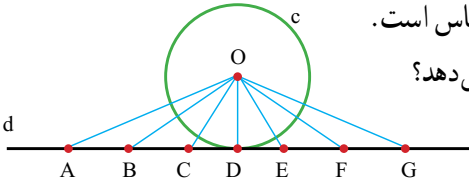
حالا وضعیت‌های مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید

و در هر حالت مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.

۳- خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است.

کدام پاره خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟

اندازه این پاره خط را با r مقایسه کنید.



۴- خط تقارن هر یک از

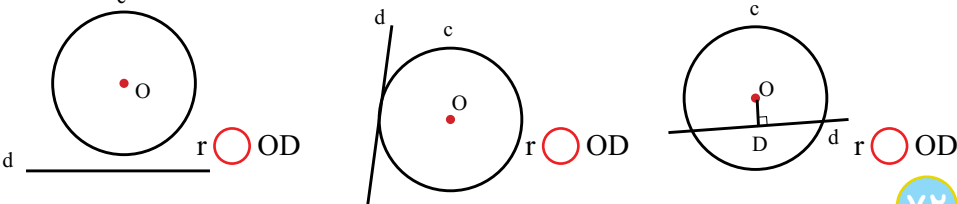
شکل‌های زیر را رسم کنید.

۵- در هر یک از شکل‌های فعالیت قبل یک خط دیده می‌شود. زاویه بین خط d و خط تقارن

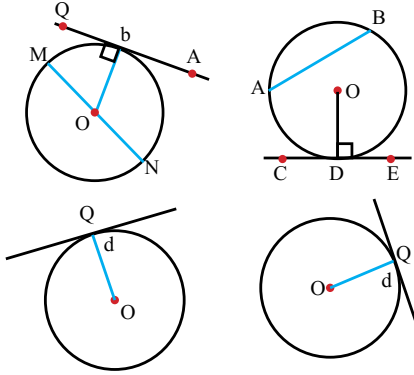
شکل، چه نوع زاویه‌ای است؟ چرا؟

۶- در هر یک از شکل‌های زیر دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d

را OD بنامید و بدون اندازه‌گیری رابطه‌های زیر را با علامت $<$, $=$, یا $>$ کامل کنید.



در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه اشتراک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.
شعاع دایره بر خط مماس، در نقطه تماس عمود است.

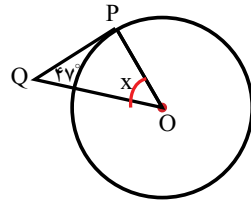
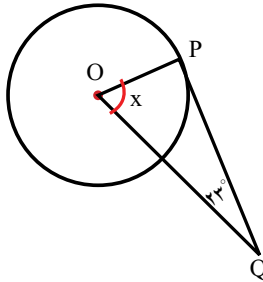
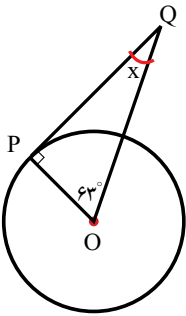


کار در کلاس

۱- در هر شکل کدام پاره خط بر دایره مماس است؟

۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است.
زاویه d چه نوع زاویه‌ای است؟

۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را با نوشتن یک معادله پیدا کنید.



فعالیت

۱- روی یک کاغذ یک دایره رسم کنید سپس صفحه

دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید.

A را به B وصل کنید. این پاره خط وتر دایره نامیده می‌شود.

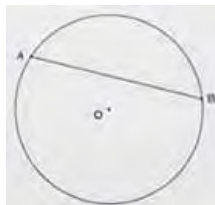
دایره را طوری تا کنید که دو سر وتر روی هم قرار بگیرند.

تای کاغذ را باز کنید.

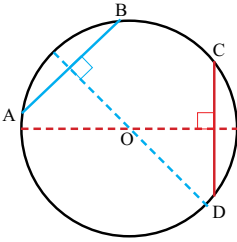
روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. این پاره خط چه نام دارد؟

همین مراحل را برای یک وتر دیگر دایره تکرار کنید.

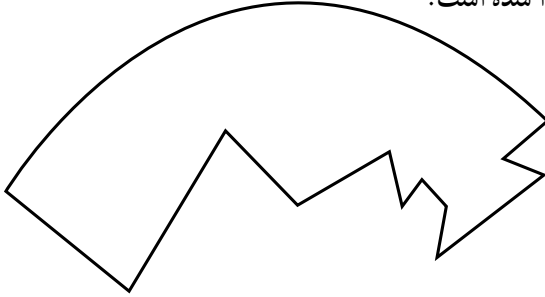
دو پاره خط رسم شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟ چرا؟



۲- به کمک شکل مقابل نتیجه فعالیت (۱) را توضیح دهید.



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.

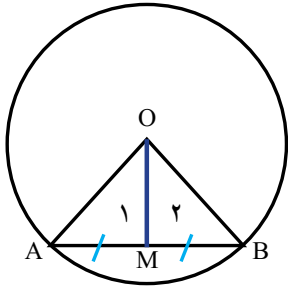
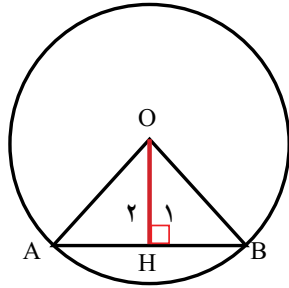


تصویر آن را در شکل زیر می بینید.

با توجه به فعالیت‌های بالا، توضیح دهید

چگونه می توانیم قطر این بشقاب را پیدا کنیم.

۴- دایره‌ای به مرکز O و وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک را کامل کنید.
چه تفاوتی بین این دو وجود دارد؟ درباره آن با دوستانتان گفتگو کنید.

<p>O را به M، وسط AB وصل می کنیم. $AM = BM$ پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $M_1 = M_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام 90° درجه هستند.</p> 	<p>خطی از O بر AB عمود می کنیم و پای عمود را H می نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائم‌اند، پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $AH = BH$</p> 
---	---

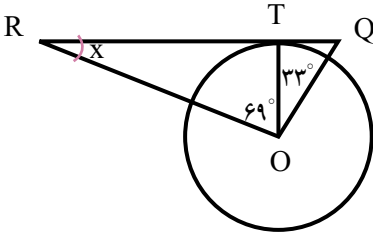
نتیجه : خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن وتر را

و بر عکس پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می کند،

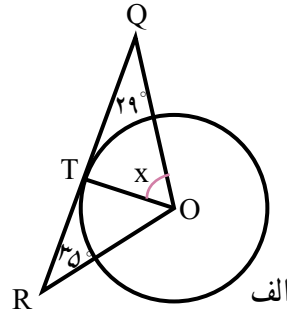
کار در کلاس



۱- در هر شکل RQ، بر دایره مماس است. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.

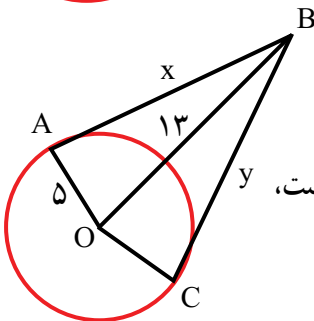
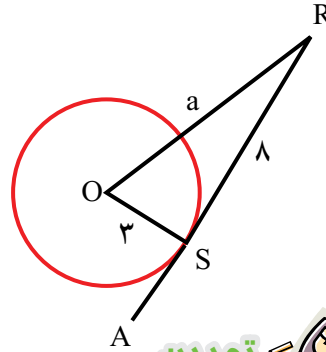
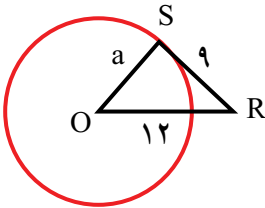


ب



الف

۲- در هر شکل SR بر دایره مماس است. طول پاره خط خواسته شده را بیابید.



تمرین



۱- از نقطه B که در فاصله ۱۳ سانتی متری

مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار گرفته است،

دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم.

فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم و نقاط تماس را A و

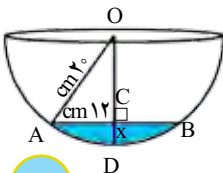
B نامیده‌ایم. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) چرا $\angle O'A = \angle O'B$ ؟

ب) چرا OO' نیمساز $\angle O$ است؟

۳- در کاسه رویه‌رو مقداری آب ریخته‌ایم،

AB برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟

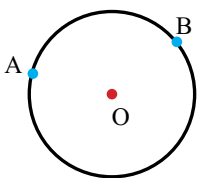


زاویه های مرکزی

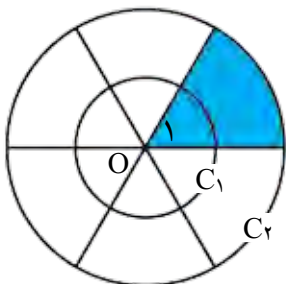
فعالیت



۱- ساعت های مقابل چه زمانی را نشان می دهند؟
 پنج دقیقه بعد هر یک از ساعت ها چه زمانی را نشان می دهند؟
 در این مدت عقربه دقیقه شمار چند دقیقه حرکت کرده است؟
 مسیر حرکت عقربه دقیقه شمار هر یک از ساعت ها را رنگ کنید، کدام یک مسیر طولانی تری را طی کرده است؟



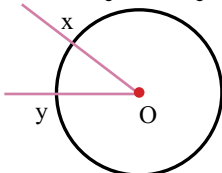
۲- دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده اند.
 کمان کوچک تر را کمان AB می نامیم و آن را با \widehat{AB} نمایش می دهیم.
 آیا ممکن است دو نقطه دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.
 ۳- مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.



زاویه AOB زاویه مرکزی روبه رو به کمان AB نامیده می شود.
 کمان AB نیز روبه رو به زاویه مرکزی AOB است.
 ۴- شکل روبه رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.
 زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟
 کمان روبه رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟
 کمان روبه رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟
 چه ارتباطی میان پاسخ ها دیده می شود؟
 آیا طول این دو کمان با هم مساوی است؟

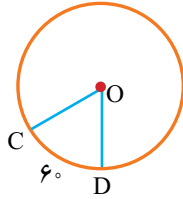
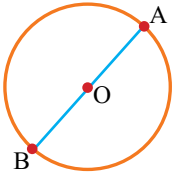
اندازه کمان \widehat{AB} ، برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبه رو به آن. بنابراین ممکن است دو کمان با اندازه های مساوی، طول های متفاوتی داشته باشند.

۵- در شکل رو به رو زاویه XOY برابر 36° است. کمان XY چه کسری از دایره است؟



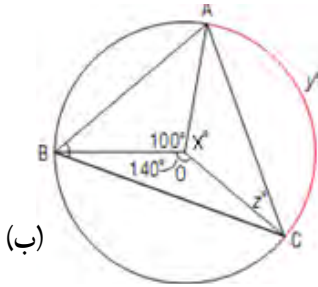
کمان XY چند درجه است؟
 چگونه می توانیم طول کمان XY را حساب کنیم؟
 درباره روش حلتان گفتگو کنید.

کار در کلاس

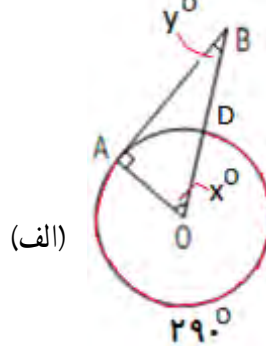


۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است. اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

۲- اندازه کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید.



(ب)

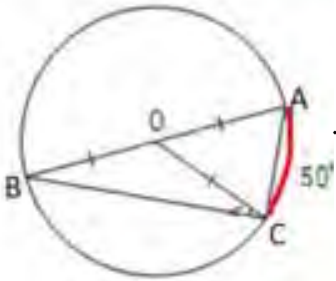


(الف)

۳- در شکل مقابل AB قطر دایره است.

(الف) هر یک از زاویه‌های مثلث ABC را به دست آورید.

(ب) کمان AB چند درجه است؟



فعالیت

۱- محیط دایره مقابل را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم.

می‌خواهیم بدانیم آیا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.

رضا دلایل زیر را برای اثبات این مطلب بیان کرد:

«مثلث‌های AOB، BOC، COD و ... متساوی‌الساقین هستند. چرا؟»

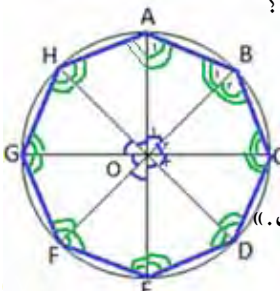
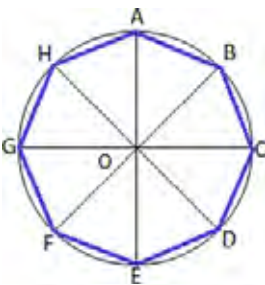
و $O_1 = O_2 = O_3 = \dots$ پس همه زاویه‌های سبز رنگ هم با هم برابرند. چرا؟»

پس همه زاویه‌های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟»

آرش گفت: «ولی این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد»

و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع‌های هشت ضلعی

پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»



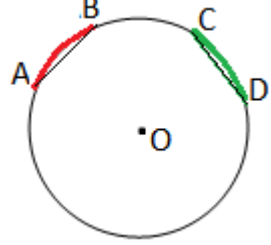
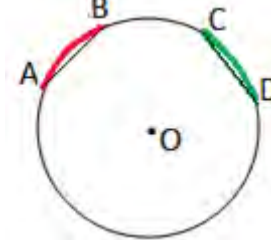
او ادامه داد: «مثلث‌های AOB ، BOC ، COD و ... هم نهشت‌اند. در چه حالتی؟

پس $AB=BC=CD=...$ چرا؟

یعنی ضلع‌های هشت ضلعی هم با هم مساوی‌اند.»

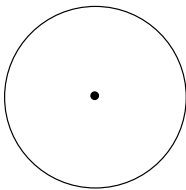
هر جا که لازم است توضیحاتی به دلایل رضا و آرشا اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت ضلعی کامل شود.

۲- برای هر مورد دلیل بیاورید:

<p>(ب) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$؟</p> 	<p>(الف) فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$؟</p> 
---	---

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید:

اگر در یک دایره، اندازه دو کمان با هم برابر باشد،
و بالعکس اگر در یک دایره اندازه دو وتر با هم برابر باشد،



کار در کلاس

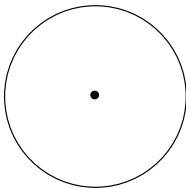


۱- با استفاده از خط‌کش و نقاله در دایره مقابل،

یک ده ضلعی منتظم رسم کنید.

۲- الف) دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره مقابل باز کنید، با شروع از یک نقطه دایره،

بی‌درپی کمان بزنید.



ب) بدین ترتیب دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟

ج) چرا این کمان‌ها با هم مساوی‌ند؟

د) هر کمان چند درجه است؟

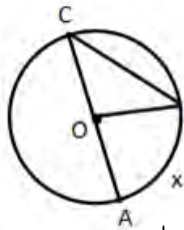
ه) چند کمان 120° درجه در شکل دیده می‌شود؟

تمرین



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\hat{AOB} = 36^\circ$. اندازه‌ی هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟

۲- با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$\hat{C} = \dots\dots\dots$, $\hat{COB} = \dots\dots\dots$, $\widehat{BC} = \dots\dots\dots$

۳- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید.

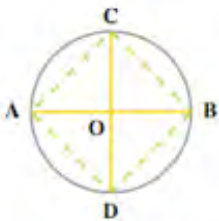
اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید.

۴- متحرکی از نقطه A روی دایره ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می کند. در هر

شکل کمان طی شده را پررنگ کرده ایم. جدول را کامل کنید.

شکل					
					کسر طی شده از دایره
		180°		90°	اندازه کمان طی شده
$6/28 \text{ cm}$			$2/0.9 \text{ cm}$	$1/57 \text{ cm}$	طول تقریبی کمان طی شده

۵- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.

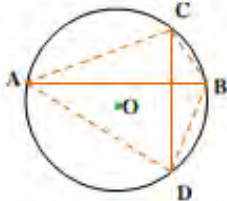


الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD، DA نیز با هم مساوی‌اند؟

پ) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

۶- وترهای AB و CD بر هم عمودند.



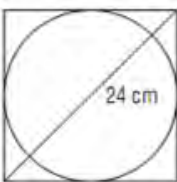
الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD، DA با هم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD، DA با هم مساوی‌اند؟

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADCB با هم مساوی‌اند؟

د) پاسخ‌هایتان را با پاسخ‌های تمرین قبل مقایسه کنید. چه تفاوتی بین این دو تمرین وجود دارد؟

۷- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی متر داریم.



مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم.

قطر این دایره را حساب کنید.

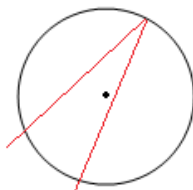
زاویه‌های محاطی

فعالیت

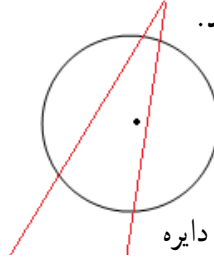


۱- در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و

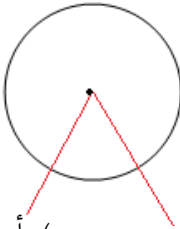
دایره را مشاهده می‌کنید.



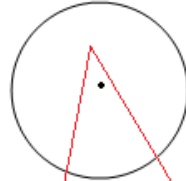
(ب) رأس زاویه روی دایره



(الف) رأس زاویه خارج دایره



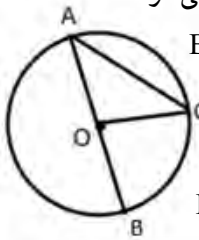
(د) رأس زاویه در مرکز دایره



(ج) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟

به زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار گرفته است، **زاویه محاطی** گفته می‌شود.



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید : $\widehat{BOC} =$

چرا زاویه A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟

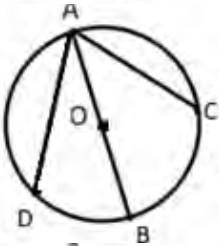
چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟

اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید : $\widehat{BAC} =$

۳- با توجه به فعالیت قبل، با کامل کردن جاهای خالی،

اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب \widehat{DC} بنویسید :

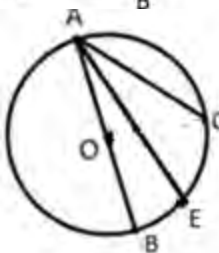
$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$



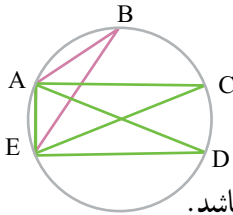
۴- با کامل کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب \widehat{EC} بنویسید :

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \dots = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$



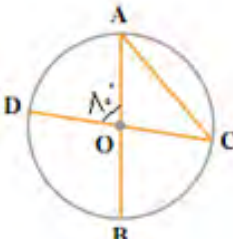
۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید، آیا در این سه فعالیت، همه حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید.
اندازه هر زاویه محاطی برابر است با اندازه



۱- با توجه به شکل مقابل،

الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را بنویسید.

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد.

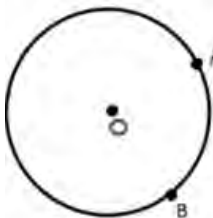


۲- در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی C را تعیین کنید.



شادی و مهتاب هنگام استفاده از دایرةالمعارف هندسه به این جمله برخوردند:

«همه زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم مساوی‌اند.»



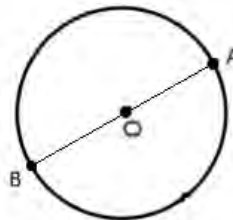
۱- شادی پرسید: «چند زاویه محاطی روبه‌رو به یک کمان هستند؟»

مهتاب شکل مقابل را کشید، چند زاویه محاطی روبه‌رو به

کمان AB رسم کرد و گفت: بی‌شمار»

شما هم چند زاویه محاطی روبه‌رو به کمان AB رسم کنید.

۲- دلیلی برای درستی جمله‌ای که بچه‌ها در دایرةالمعارف دیده‌اند، پیدا کنید و بنویسید.

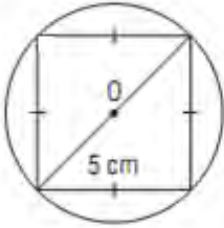
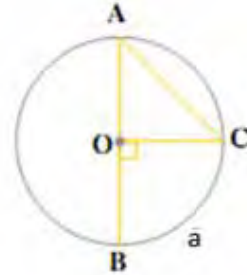
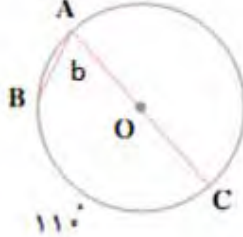
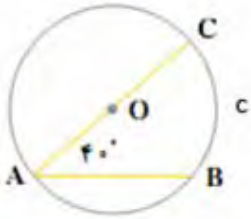


۳- دلیلی برای درستی جمله زیر ارائه کنید:

«زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره، زاویه‌ای قائمه است.»

کار در کلاس

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.

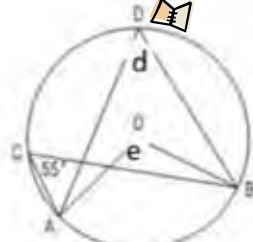
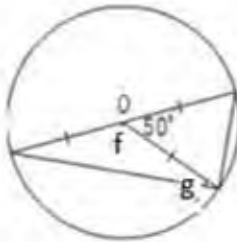
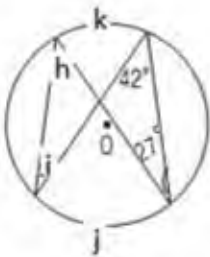


۲- در شکل مقابل همه‌ی رأس‌های لوزی‌ای به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد، چرا این لوزی، مربع است؟ قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

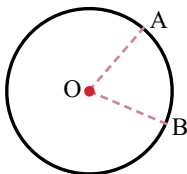


تمرین

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

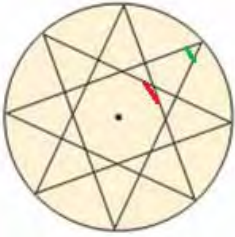


۲- در شکل مقابل، زاویه‌ی مرکزی AOB برابر با 72° است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟



دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کنید و با شروع از نقطه‌ی B، بی‌دری کمان‌هایی بزنید؛ به این ترتیب، چند کمان متساوی روی دایره جدا می‌شود.

۳- در شکل مقابل دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.



الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

ب) اگر شکل را حول مرکز تقارنش 36° درجه بچرخانیم،

چند بار روی خودش تصویر می‌شود؟

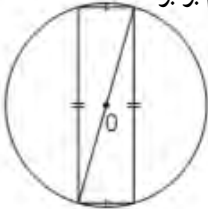
ج) اندازه دو زاویه مشخص شده روی شکل را پیدا کنید و بنویسید.

۴- یک دایره بکشید. سپس چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟

۵- الف) در شکل روبه‌رو ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.



چرا چهارضلعی مستطیل است؟

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی متر است.

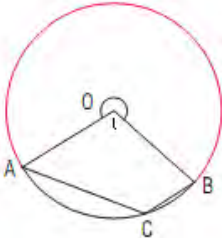
طول مستطیل را به دست آورید.

۶- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

الف) زاویه O_1 را بر حسب x بنویسید.

ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید.

ج) زاویه C را بر حسب x بنویسید.



۷- پره‌های چرخ شکل مقابل دوازده کمان مساوی روی محیط آن ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ 30° سانتی متر است.

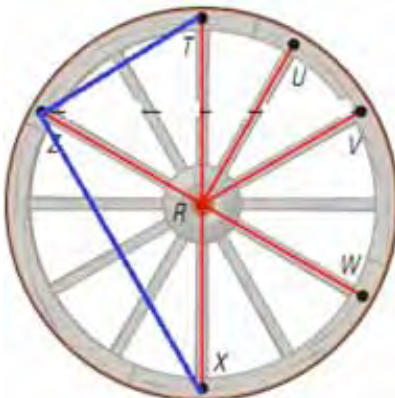
الف) طول TX چقدر است؟

الف) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

ب) طول ZT چقدر است؟

ج) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

د) طول ZX چقدر است؟



مفاهیم و مهارت‌ها

کاربرد

تمرین‌های ترکیبی

