

فصل پنجم - بردار و مختصات

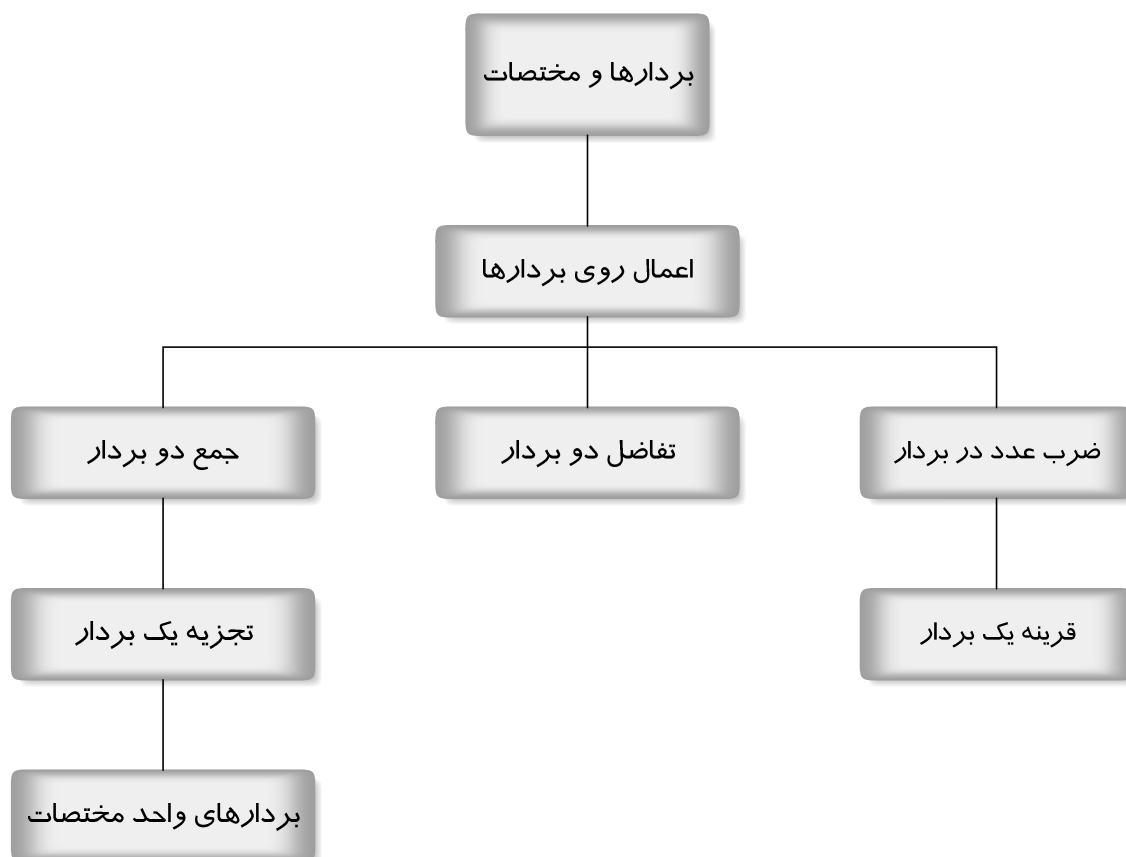
راهنمای معلم - ریاضی هشتم

نگاه کلی به فصل

در پایه هفتم بردار و مختصات را بررسی کردید. همچنین بردارهای مساوی، قرینه یک بردار و بردار انتقال تدریس شد. در سال هشتم ضمن معرفی بردارها به جمع دو یا چند بردار با هم پرداخته که به بردار حاصل جمع آنها بردار برآیند می‌گوییم. سپس یک بردار را روی دو راستای مشخص تجزیه می‌کنیم. در ادامه ضرب عدد در بردار را مطرح می‌کنیم و آخرین مبحث این فصل بردارهای واحد مختصات هستند که با استفاده از آنها می‌توان مختصات بردار را نمایش داد.

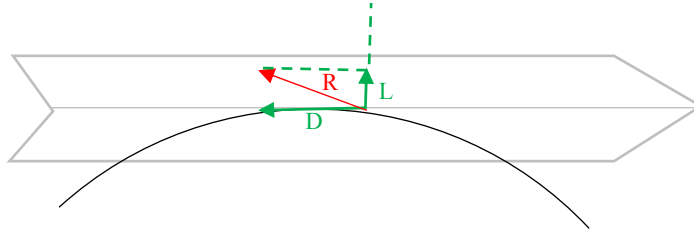
در ارائه مطالب این فصل ابتدا از دیدگاه هندسی استفاده می‌کنیم. سپس با توجه به دیدگاه هندسی، فرمول‌های جبری مربوط به بردارها را معرفی می‌کنیم. اگر دیدگاه‌های هندسی به صورت درست در ذهن دانش‌آموز نقش بندد در این صورت آنها می‌توانند از روی تصاویر هندسی، رابطه‌های جبری مربوط به بردارها را بنویسند و اگر زمانی رابطه‌های جبری را فراموش کنند، چون دیدگاه‌های هندسی شهودی هستند، با تصور آنها می‌توانند رابطه‌های جبری را خودشان بازنویسی کنند.

نقشه مفهومی

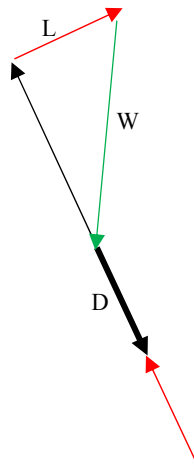


شرح تصویر عنوانی

وقتی موشکی روی مسیری در حال حرکت است و در هر لحظه بردار مماس بر مسیر حرکت موشک مانند R موجود است. چنانچه بردار R را روی راستای محور موشک و راستای عمود بر محور موشک تجزیه کنیم، بردارهایی مانند D («پسا» $(Drag)$) و L («برآ» $(Lift)$) به وجود می‌آیند. بردار L باعث بالا رفتن موشک و بردار D نیروهای مقاومت هوا در راستای محور موشک و مخالف جهت با حرکت موشک است.



در شروع فصل بهتر است از کاربرد بردار در مهندسی مکانیک و فیزیک صحبت کنید و بعد از تدریس برآیند دو یا چند بردار، صفحه نخست را دوباره مورد بازبینی قرار دهید و بردار برآیندی که باعث حرکت موشک می شود را محاسبه کنید.



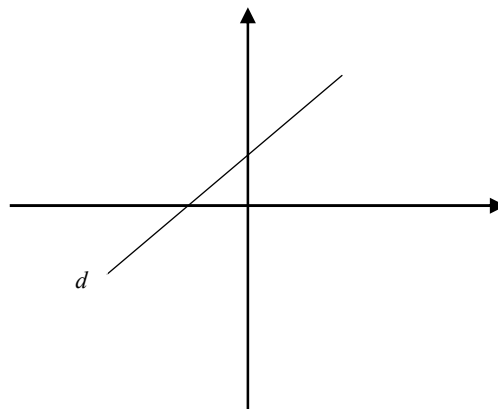
شروع نیروی پیشران

دانستنی هایی برای معلم

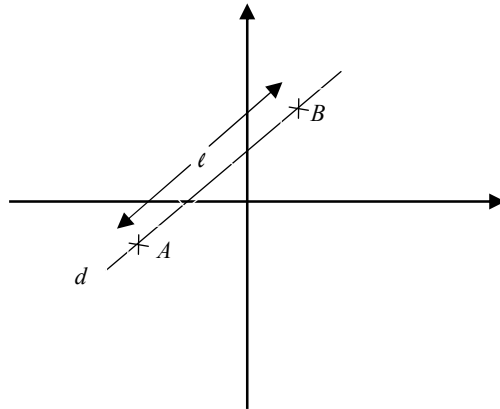
معرفی بردار

برای مشخص کردن هر بردار در صفحه مختصات، ابتدا خطی دلخواه مانند d

در صفحه رسم می کنیم:

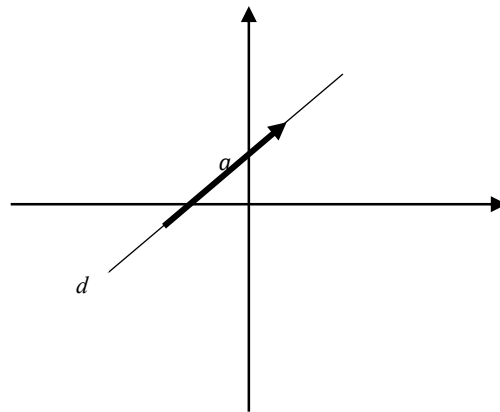


سپس روی این خط پاره خطی به طول مشخص در نظر می گیریم:



اکنون پاره خط جهتدار \overrightarrow{AB} را با ابتدا در A و انتها در B به نام بردار \vec{a} در نظر

می گیریم.



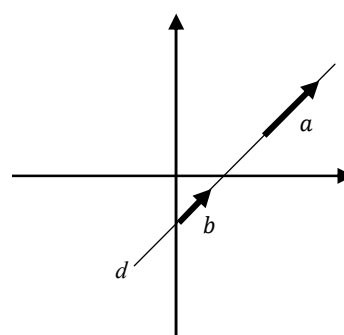
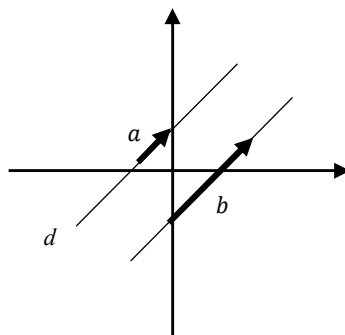
در این حالت به خط d راستای بردار a گفته می شود، بنابراین راستای بردار

خطی است که بردار بر آن خط واقع است.

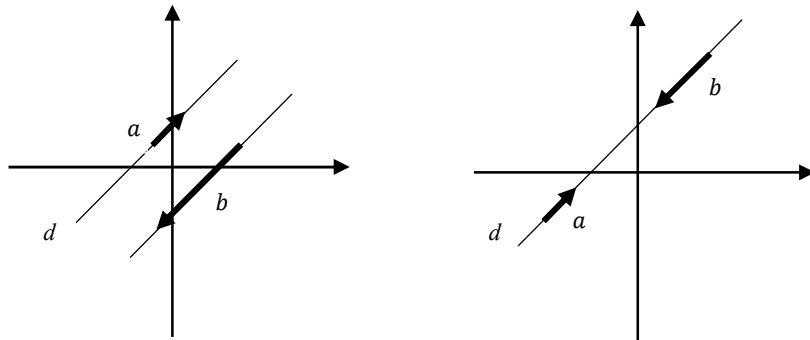
هر گاه دو بردار، هم راستا باشند، آن گاه آن‌ها روی یک خط یا روی دو خط

موازی قرار دارند.

a و b هم راستا و متحدالجهت



a و b هم راستا و مختلف‌الجهت



معرفی منابع برای معلمان

- خلاقیت ریاضی: تألیف جرج پولیا؛ ترجمه پرویز شهریاری؛ انتشارات فاطمی
- بردار (از سری کتاب های کوچک ریاضی) تألیف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی؛ انتشارات مدرسه.

جمع بردارها

هدف

- ۱- مفهوم برآیند دو بردار را به صورت هندسی درک کنند.
- ۲- یافتن رابطه مختصاتی را برای مجموع دو بردار.
- ۳- مفهوم بردارهای برابر را هم به صورت هندسی و هم به صورت جبری مختصاتی فرا بگیرد.
- ۴- برآیند سه یا چند بردار را محاسبه کند.
- ۵- درک مفهوم بردار صفر.
- ۶- تجزیه یک بردار روی دو راستای مشخص.

روش تدریس

جمع بردارها فعالیت صفحه ۷۰

در این فعالیت ابتدا با دیدگاه هندسی به بررسی حاصل جمع یا برابری دو بردار می‌پردازیم، سپس با مقایسه مختصات بردارهای c, b, a به این نتیجه می‌رسیم که مؤلفه اول بردار c به صورت حاصل جمع مؤلفه های اول دو بردار a و b است و مؤلفه دوم بردار c به صورت حاصل جمع مؤلفه های دوم دو بردار a و b است.

در انتهای سؤال ۴ این فعالیت پرسیده شده که:

در چه صورت برداری که از ابتدای a به انتهای b وصل می‌شود، بردار c حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید.

پاسخ: اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، در این صورت برداری که از ابتدای a به انتهای b وصل می‌شود، یعنی بردار c حاصل جمع بردارهای a و b است.

کار در کلاس ص ۷۱

با تعبیر هندسی بردار c وقتی می‌توان حاصل جمع دو بردار a و b باشد که دو شرط زیر برقرار باشد.

شرط اول: ابتدای b در انتهای a باشد (یا ابتدای a در انتهای b باشد).

شرط دوم: ابتدای بردار c در ابتدای بردار a و انتهای بردار c در انتهای بردار b

$c = a + b$ باشد؛ (یا ابتدای c در ابتدای b و انتهای c در انتهای a باشد؛ $c = b + a$)

فعالیت ص ۷۱

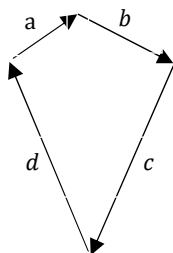
در سؤال ۲ با مطالعه راه حل های امیررضا متوجه می شویم که جمع بردارها خاصیت جابجایی دارند.

در سؤال ۴ این فعالیت، مریم به طور هم زمان راه حل های فاطمه و زهرا را به کار برده است و راه حل مریم همان حاصل جمع دو بردار به روش متوازی الاضلاع است.

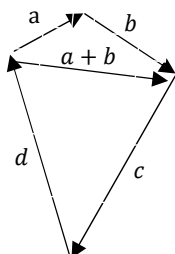
کار در کلاس ص ۷۲

در این فعالیت ضمن یادآوری بردار قرینه که در ریاضی هفتم موجود است، بردار صفر را به صورت حاصل جمع هر بردار با بردار قرینه اش نشان داده است. در انتهای سؤال ۲، ملاحظه می کنید که $a + b + c = 0$ یعنی بردار صفر می تواند حاصل جمع سه بردار باشد.

در شکل زیر ملاحظه می کنید که: $a + b + c + d = 0$

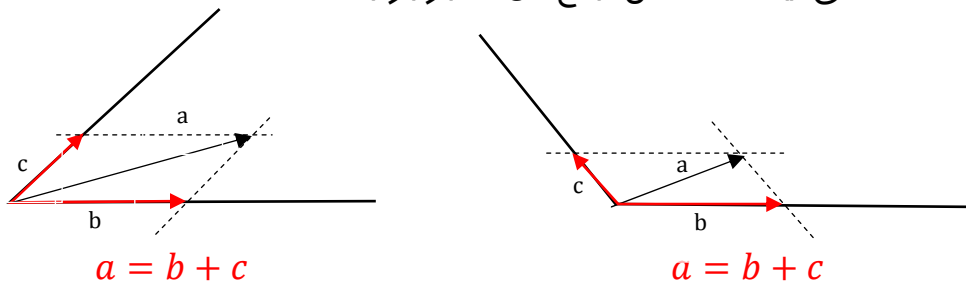


زیرا بردار $(a + b) + c$ قرینه بردار d است.



فعالیت ص ۷۳

۱- برای تجزیه بردار a روی خطهای آبی که در این فعالیت داده شده‌اند، باید از انتهای a دو خط موازی با خطها یا راستاهای آبی رنگ رسم کنیم. در این صورت دو بردار به دست می‌آید که حاصل جمع آن‌ها برابر با a است.



۲- سئوالی باز پاسخ است که بی شمار پاسخ درست دارد.

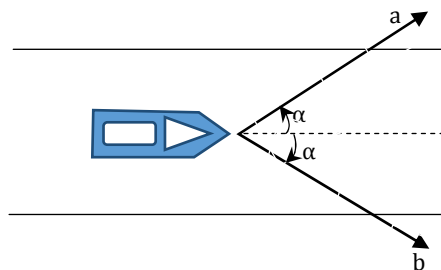
در این جا باید تأکید کنیم که همه جواب‌های ممکن درست هستند و این برخلاف ذهنیت عمومی دانش‌آموزان است که تصور می‌کنند؛ مسائل ریاضی فقط یک جواب درست دارند.

در این فعالیت از دیدگاه جبری $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ ؛ به این نتیجه هندسی می‌رسیم که هر بردار مانند $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را می‌توان به تعداد بی شمار حالت تجزیه کرد.

حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۱ صفحه ۷۳

در قسمت الف، بردارهای a و b هم طول هستند و هر دو بردار با راستای افقی



زوایای یکسان دارند.

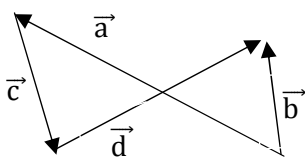
در این قسمت اگر صلاح دیدید، جریان آب را هم در نظر بگیرید و بحث کنید.
سپس جواب های ممکن را با مشارکت دانش آموزان به دست آورید.

توصیه های آموزشی

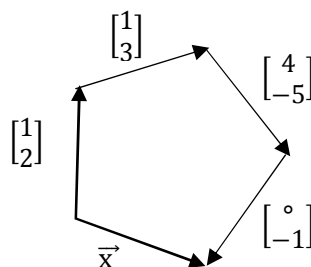
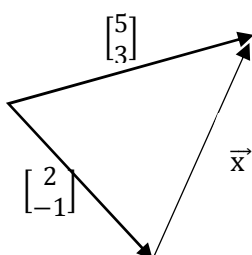
- ۱- قبل از ورود به درس بعدی بهتر است با دوره‌ای از سال گذشته، مفاهیم راستا و جهت را برای بردار یادآوری کنید.
- ۲- مفهوم دو بردار مساوی (برابر) را از سال گذشته یادآوری می‌نمایید.
- ۳- فرض کنید \vec{a} و \vec{b} دو بردار و r و s دو عدد حقیقی باشند، برای محاسبه و تعبیر هندسی بردار $r\vec{a} + s\vec{b}$ در درس بعدی باید دانش آموزان مفهوم برابری دو بردار را به خوبی فرا گرفته باشند.

نمونه سئوالات ارزشیابی

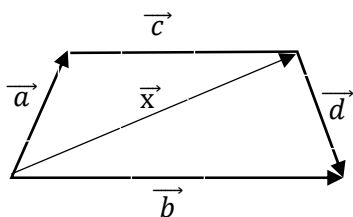
- ۱- اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4x + 8 \\ x + 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ هم اندازه، هم جهت و هم راستا باشند در این صورت مختصات بردار \vec{b} را پیدا کنید.
- ۲- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2m - 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4m + 9 \\ -n \end{bmatrix}$ هم اندازه، هم راستا ولی مخالف جهت هم باشند، در این صورت مختصات بردارهای \vec{a} و \vec{b} را پیدا کنید.



۳- کدام بردار حاصل جمع دو بردار دیگر است.



۵- با توجه به شکل زیر بردار x را به چند صورت می توان نوشت:



۶- اگر O مبدأ مختصات و داشته باشیم $\vec{OP} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\vec{MN} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

در این صورت مختصات بردار \vec{OM} را بیابید. $\vec{PN} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

ضرب عدد در بردار

هدف

- ۱- درک ضرب عددی مثبت در یک بردار (تعبیر هندسی)
- ۲- درک ضرب عددی منفی در یک بردار (تعبیر هندسی)
- ۳- رابطه ی مختصاتی ضرب عدد در بردار را بنویسند.
- ۴- دو بردار هم راستا و هم جهت و غیر هم جهت را بشناسد.
- ۵- حاصل جمع یا برابری مضارب بردارها را محاسبه کند.

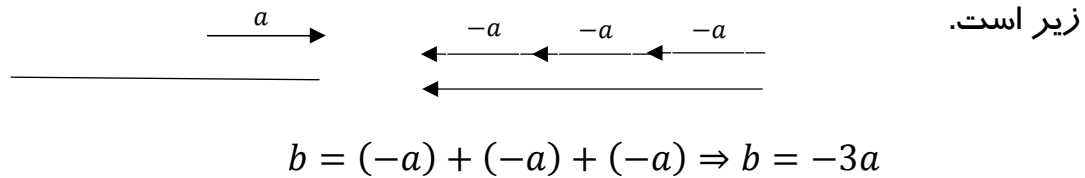
روش تدریس

فعالیت ص ۷۴

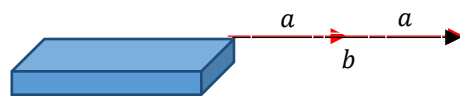
در این فعالیت با توجه به دیدگاه های هندسی که از سؤال های ۱ و ۲ بدست

می آید، عبارتهای جبری متناظری برای ضرب عدد در بردار می نویسیم.

۱- بردار انتقال خودرو در شکل نشان داده شده است، اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد بردار انتقال آن به صورت



۲-



$$b = a + a \Rightarrow b = 2a$$

۳- اگر a یک بردار باشد در این صورت برای هر $k \in R, k \neq 0$ ، بردار ka را ضرب عدد k در بردار a می‌گوییم و داریم:

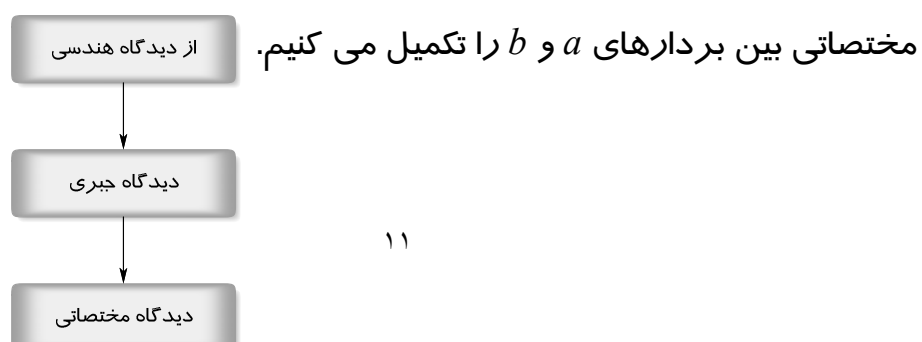
الف) هرگاه $k > 0$ در این صورت بردار ka هم راستا و هم جهت با بردار a است.

ب) هرگاه $k < 0$ در این صورت بردار ka هم راستا و مختلف‌الجهت با بردار a است.

ج) اگر $k > 1$ یا $k < -1$ در این صورت طول بردار ka از طول بردار a بزرگتر است.

د) اگر $0 < k < 1$ یا $-1 < k < 0$ در این صورت طول بردار ka از طول بردار a کوچکتر است.

۴- در این قسمت، ابتدا با دیدگاه هندسی نسبت به بردارهای a و b یک رابطه جبری برای مقایسه این دو بردار به کار می‌بریم، سپس به کمک آن رابطه



توجه: در پایان این فعالیت، قرینه یک بردار را به صورت حاصل ضرب عدد (-1) در بردار معرفی کرده است.

یعنی هر گاه a یک بردار باشد در این صورت $-1 \times a$ را قرینه بردار a می‌گوییم و داریم:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow -1 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

یعنی از دیدگاه مختصاتی، برای این که قرینه بردار a را به دست آوریم، کافی است، مختصات بردار x را قرینه کنیم.

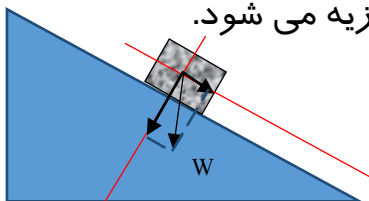
فعالیت ص ۷۵

توجه: در این فعالیت دو مفهوم جمع دو بردار (برایند بردار) و ضرب عدد در بردار باهم ترکیب می‌شوند.

حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۳ ص ۷۷

معمولاً در درس فیزیک از دانش آموزان می‌خواهند که نیروی وزن را تجزیه کنند، در این تمرین، نیروی وزن جعبه روی دو راستا که یکی موازی با سطح شیب‌دار و دیگری عمود بر سطح شیب‌دار است، تجزیه می‌شود.



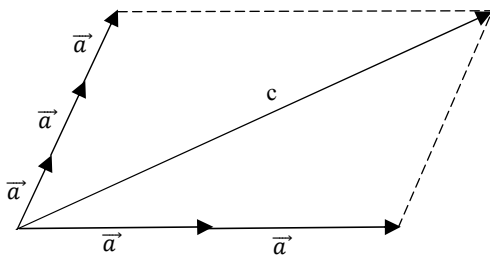
برای این منظور از انتهای بردار w خط‌هایی عمود بر دو راستا فرود می‌آوریم.

توصیه های آموزشی

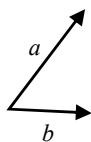
مهم ترین توصیه در این درس این است که مفهوم جمع دو یا چند بردار و مفهوم ضرب یک عدد در بردار با هم ترکیب می شوند و دانش آموزان باید بتوانند ترکیب این دو مفهوم را هم به صورت هندسی و هم به صورت جبری مختصات تعبیر کنند.

نمونه سئوالات ارزشیابی

۱- بردار c را برحسب بردارهای \vec{a} و \vec{b} بنویسید.



۲- بردارهای \vec{a} و \vec{b} را به صورت زیر در نظر بگیرید. سپس بردار



$\vec{c} = -2b + \frac{1}{2}a$ را رسم کنید.

۳- با توجه به رابطه های زیر، مقادیر x و y را بیابید.

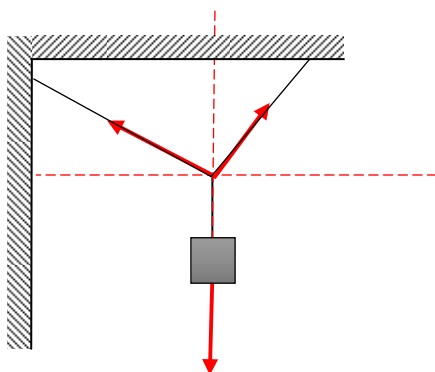
$$\text{الف) } -2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } x \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۴- مختصات بردار \vec{x} را با توجه به معادله برداری زیر بدست آورید.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۵- وزنه زیر توسط دو طناب در حال تعادل است، نیروهای مشخص شده روی شکل را در راستاهای داده شده، تجزیه کنید.



بردارهای واحد مختصات

هدف

- ۱- درک هندسی بردارهای واحد دستگاه مختصات.
- ۲- درک مختصاتی بردارهای واحد مختصات.
- ۳- هر بردار را بتواند به صورت ترکیبی از بردارهای واحد بنویسد.
- ۴- حل معادله های برداری.

روش تدریس

فعالیت ص ۷۸

- ۱- پاسخ به سؤال ۱، نیاز به وجود بردار واحد احساس می شود.
- ۲- در این قسمت بردار واحد محور مختصات نشان داده شده است، سپس به کمک این بردار واحد می توان عددهای ۱ و ۲- را به صورت زیر روی محور

مشخص کرد.

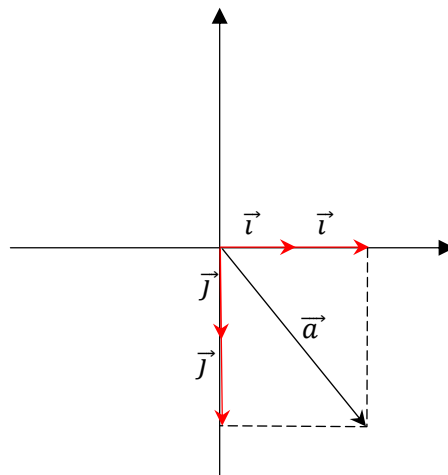
۳- در این جا با استفاده از دیدگاه هندسی که برای بردارهای \vec{i} و \vec{j} به دست آوردیم، مختصات هر کدام از آن‌ها را با توجه به مختصات انتهای این بردارها می‌نویسیم.

در ادامه این فعالیت می‌خواهیم نشان دهیم که هر بردار را می‌توان به دو صورت نمایش داد.

نمایش اول بردار با مختصات و نمایش دوم بردار، با استفاده از بردارهای واحد مختصات هستند.

کار در کلاس ص ۷۹

در این قسمت می‌خواهیم نشان دهیم که هر بردار را می‌توان روی محورهای مختصات تجزیه کرد و با استفاده از آن مختصات بردار را نوشت.



$$a = 2i - 2j = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

فعالیت ص ۷۹

در سوال ۲، اصطلاح «معادله برداری» مطرح شده است، معادله برداری به معادله‌ای گفته می‌شود که مجهول در آن یک بردار باشد و هدف از حل این معادله، پیدا کردن برداری باشد که در معادله صدق کند.
سعید و حمید، دو راه متفاوت بردار مجهول را به دست آورده‌اند.

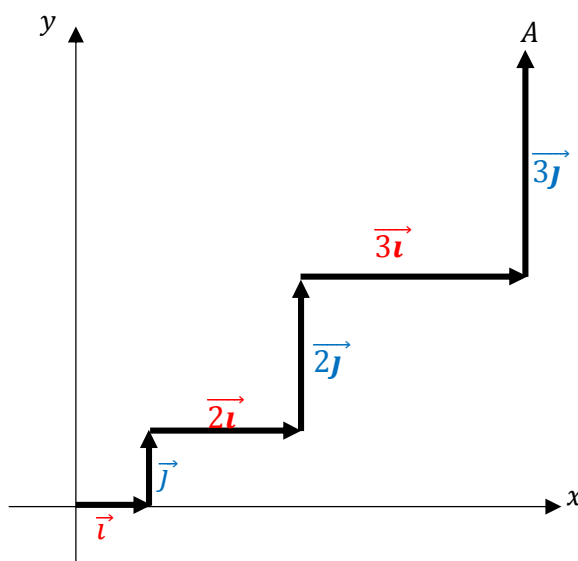
حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۶ ص ۸۱

بعد از شش حرکتی که روی شکل مشخص شده است بردارهایی که با محور x موازی هستند باهم و بردارهایی که با محور y موازی هستند، باهم جمع کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} + 2\vec{i} + 3\vec{i} = (1 + 2 + 3)\vec{i} = 6\vec{i} \\ \vec{j} + 2\vec{j} + 3\vec{j} = (1 + 2 + 3)\vec{j} = 6\vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 \\ 1 + 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$



با مشاهده ۱۰ حرکت اگر این روبات به نقطه B برسد، در این صورت ۵ بار در راستای محور x ها و ۵ بار در راستای محور y ها مانند الگو جابجا شده است و مختصات نقطه B به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ توجه:}$$

در صورت لزوم و بنابر صلاح دید خودتان می توانید مختصات نقطه ای را که روبات پس از $2n$ حرکت به آن رسیده به صورت زیر بنویسید.

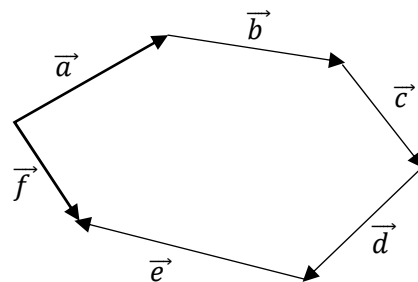
$$\begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ 1 + 2 + 3 + \dots + n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

چنان چه روبات $(2n + 1)$ حرکت کرده باشد، مختصات نقطه پس از این

$(2n + 1)$ حرکت به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

تمرین ۷ صفحه ۸۱



$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

با توجه به شکل بالا، ملاحظه می کنید که اندازه بردار f از اندازه های همه

بردارها کوچکتر است.

تمرین ۸ صفحه ۸۱

این خودرو در کل به اندازه ۲۸ واحد حرکت کرده است. در این حالت طول بردارها را با هم جمع می کنیم و کل مسافت پیموده شده را محاسبه می کنیم. این خودرو در راستای عمودی ۲ واحد به پایین جابه جا شده است یعنی بردار جابجایی یا انتقال خودرو $\vec{-2j}$ است. در این حالت برآیند یا حاصل جمع بردارها را مشخص می کنیم.

نمونه سئوالات ارزشیابی

۱- کدام بردار با بقیه بردارها موازی نیست؟

$$\vec{b} = \vec{j} + 6\vec{i} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{d} = -9\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \quad (\text{د})$$

$$\vec{c} = -\frac{9}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} \quad (\text{ج})$$

۲- اگر بردارهای $\vec{a} = (k-2)\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - (5+n)\vec{j}$ هم راستا ولی

غیرهم جهت باشند در این صورت مقادیر k و n را بیابید.

۳- هرگاه $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$ نیز داشته باشیم

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \quad \text{در این صورت حاصل } m+n \text{ را پیدا کنید.}$$

۴- در معادله $-\vec{3x} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\vec{i} = -5\vec{j}$ ، مختصات بردار \vec{x} را پیدا کنید.