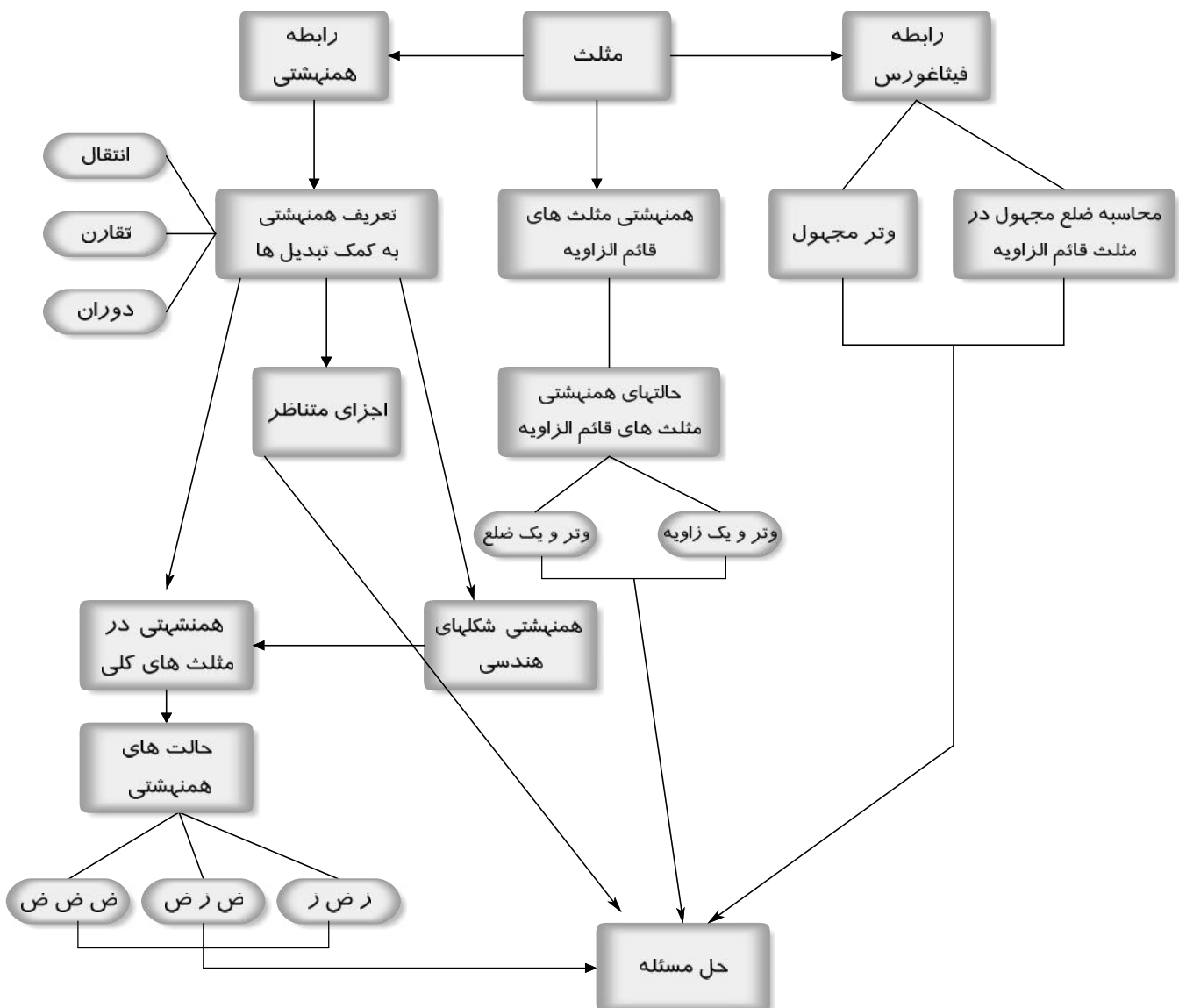


راهنمای معلم - ریاضی

نگاه کلی به فصل

مطالب این فصل با آموزش رابطه‌ی فیثاغورس و کاربرد آن شروع می‌شود. سپس با استفاده از تبدیل‌های هندسی که دانش آموزان در سال گذشته یاد گرفته‌اند موضوع نهشتی در شکل از جمله هم نهشتی دو مثلث مطرح می‌شود. براساس آن سه حالت هم نهشتی دو مثلث و تعدادی حالت که دو مثلث هم نهشتی نخواهند شد بررسی می‌شود. در آخرین درس این قسمت حالت‌های هم نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه مطرح و چند نمونه مسئله حل می‌شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

دقت در اشیاء ، پدیده ها و اتفاقات پیش روی انسان همواره راه‌گشا به سوی فهم و درک بیشتر انسان می باشد. در حل مسائل ریاضی نیز یکی از اساسی‌ترین مهارت‌ها که به پیشبرد فرآیند حل مسئله کمک می کند دقت و تیزبینی جوانب مختلف موضوع می باشد. آیه مذکور به همین موضوع اشاره دارد و برای نمونه یک تصویر از طبیعت و یک فرکتال ساخته دست انسان برای مشاهده و مقایسه آورده شده است.

دانستنی هایی برای معلم

مسیرهایی برای توسعه

دانش آموزان در فصل ۳ کتاب درسی با خاصیت های چهارضلعی‌های خاص آشنا شده‌اند. در این فصل نیز ابزاری برای اثبات برابری دو مثلث و به تبع آن اجزای متناظر آن‌ها در اختیارشان قرار گرفته است. یکی از مسیرهای توسعه مفاهیم این فصل می تواند به کارگیری این ابزار برای اثبات خاصیت های چهارضلعی‌ها باشد. مسأله‌های زیر با این هدف در اینجا آمده‌اند.

• به کمک تعریف هر چهارضلعی، ارتباط میان زاویه ها و حالت های تساوی

مثلث‌ها ثابت کنید:

الف) قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند.

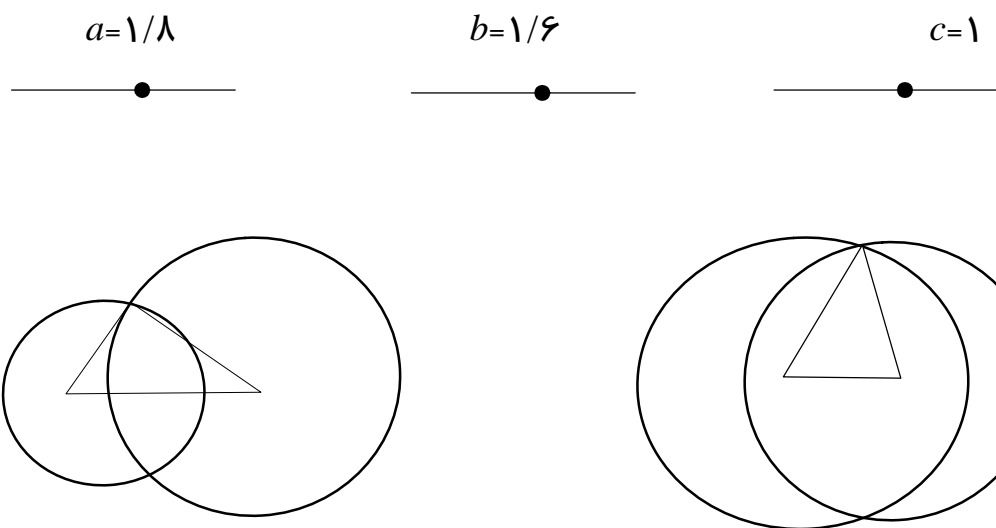
ب) ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

ج) قطرهای مربع بر هم عمودند.

استفاده از ابزار های فن آورانه

۱- در کتاب درسی، سه حالت هم نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه آمده است. یکی از روش‌های متقاعد کردن دانش آموزان برای قبول هر یک از این حالت‌ها، رسم مثلث‌هایی با داده‌های یکسان در آن حالت روی کاغذ، منطبق کردن مثلث‌ها روی هم و مشاهده هم نهشتی آن‌هاست. محیط نرم‌افزار *GeoGebra* با قابلیت‌هایی که دارد این امکان را برای دانش آموزان فراهم می‌کند که مثلث‌های مورد نظر را رسم نمایند و هم نهشتی آن‌ها را بررسی کنند. ضمن آن که پویایی شکل‌ها امکان تکرار آزمایش با داده‌های دیگر را به سادگی و به سرعت ایجاد می‌نماید.

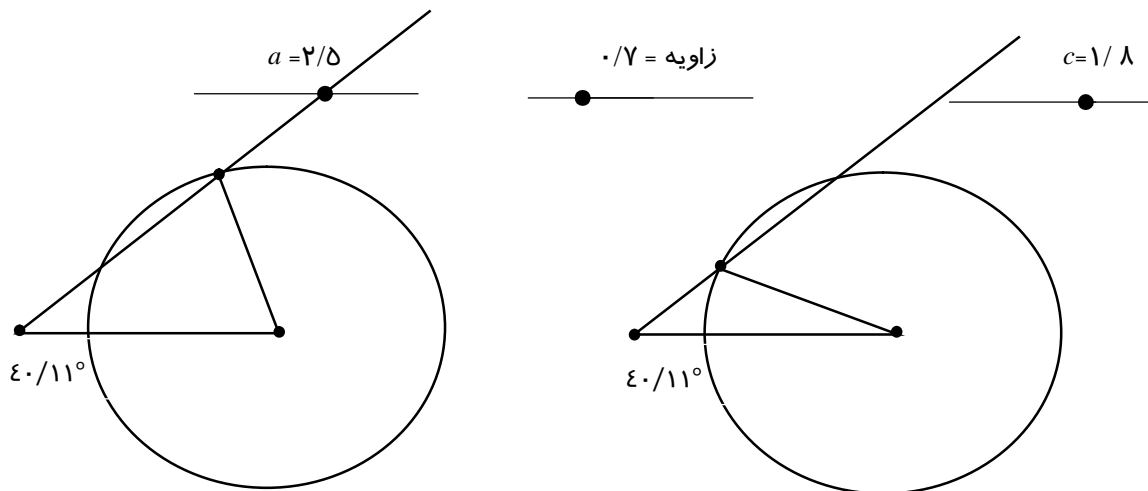
در شکل زیر دو مثلث با سه ضلع مساوی با دو ترتیب مختلف رسم شده‌اند. به کمک لغزنده‌ها می‌توان اندازه ضلع‌های هر دو مثلث را هم‌زمان نظیر به نظیر تغییر داد و با کمک ابزار بررسی ارتباط دو شیء، می‌توان هم نهشتی این دو مثلث را بررسی کرد.



۲- آزمایش حالت هایی در رسم مثلث که لزوماً به یک مثلث یکتا منجر نمی‌شوند نیز یکی دیگر از تجربه هایی است که به سادگی در محیط نرم افزار *GeoGebra* ممکن می‌شود.

در شکل زیر مثلث ها با داشتن دو ضلع و زاویه غیربین رسم شده اند و هم

نهشت نیستند!

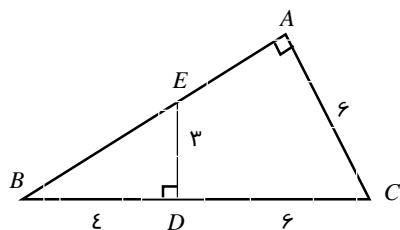


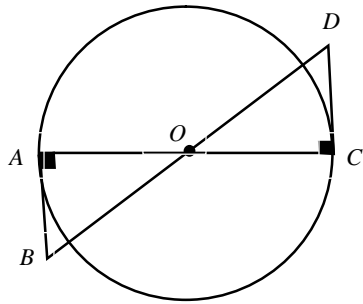
معرفی منابع برای معلمان:

- ریاضیات برای معلمان: تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی.ال.مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۱۶
- اثبات بدون کلام؛ تألیف راجر. ب.نلسن؛ ترجمه سپیده چمن آرا؛ انتشارات فاطمی؛ فصل ۱

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- اندازه پاره خط AE را به دست آورید.

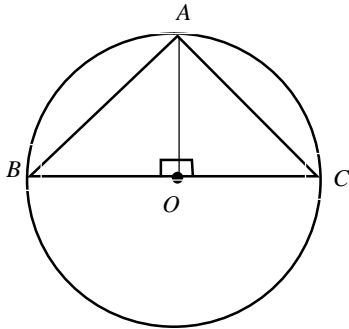




۲- دلیل هم نهشتی دو مثلث را بیان کنید.

مثلث $\triangle OAB$ با کدام تبدیل هندسی به مثلث

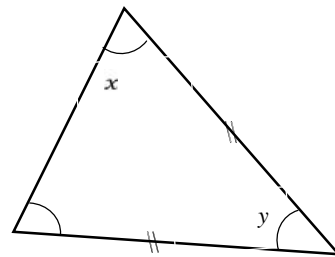
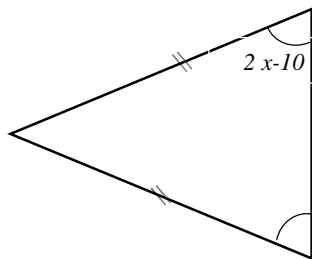
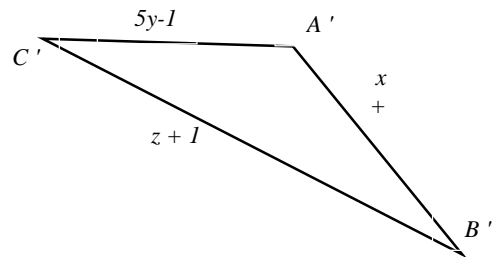
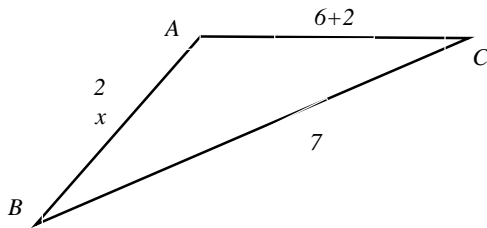
ODC منطبق می شود؟



۳- نقطه ی O مرکز دایره است دلیل هم نهشتی

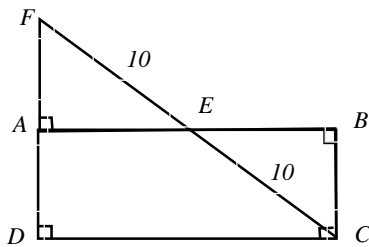
دو مثلث را بیان کنید.

۴- با توجه به هم نهشت بودن مثلث ها اندازه زاویه ها و ضلع را پیدا کنید.



۵- با توجه به اندازه های مشخص شده و طول ضلع های مثلث DFC را پیدا کنید.

دلایل کارهای خود را توضیح دهید.



رابطه فیثاغورس

هدف

- ۱- با انجام فعالیت های داده شده رابطه ی فیثاغورس را کشف و درک کند.
- ۲- در تشخیص و بیان رابطه ی فیثاغورس در حالت های مختلف مثلث قائم الزاویه تسلط یابد.
- ۳- در حل مسائل بتواند از رابطه فیثاغورس استفاده کند و با تعدادی از کاربردهای آن آشنا شود.
- ۴- در هر مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع بتواند اندازه ضلع سوم را بدست آورد.
- ۵- با داشتن اندازه های سه ضلع مثلث بتواند قائم الزاویه بودن یا نبودن آنرا تشخیص دهد.

ابزار مورد نیاز

- ۱- شکل های مربوط به فعالیت ها
- ۲- خط کش، گونیا و نقاله

روش تدریس

در قسمت اول فعالیت اول با توجه به صفحه شطرنجی و خطوطی که برای کمک به شمارش مربع ها، درون شکل ها کشیده شده است و با توجه به جداول ارائه شده انتظار می رود دانش آموز قبل از معرفی صریح رابطه فیثاغورس بتواند حداقل وجود نوعی رابطه بین اندازه های اضلاع مثلث قائم الزاویه را احتمال دهد.

در قسمت دوم فعالیت اول نیز با ساختن شکل هایی نظیر آنچه داده شده است و جابجایی قطعه ها بگونه ای که با تکه های موجود در دو مربع ایجاد شده روی دو ضلع زاویه قائمه، مربع ایجاد شده روی وتر کاملاً پوشانده شود تعمیق و درک بهتر رابطه ی فیثاغورس در ذهن دانش آموزان مدنظر می باشد. در قسمت آخر هم رابطه فیثاغورس در کنار شکل مثلث قائم الزاویه مربوطه آمده است تا کاربرد آن در حل مسائل توسط دانش آموزان را تسهیل نماید.

درباره ی روش اثبات ابوالعباس نیریزی، دانشمند ایرانی، برای اثبات قضیه فیثاغورس، گرچه در این روش هم با جابجایی دو مثلث سبز و زرد برابری مساحت های مورد نظر کاملاً قابل مشاهده است ولی آنچه بیشتر مد نظر می باشد، معرفی این دانشمند ایرانی است. چنین نمونه هایی می تواند در دانش آموزان حس غرور ملی و مذهبی را برانگیزد و از ریشه دواندن ناخودآگاه این تفکر که، همواره تنها استفاده کننده از علوم دیگر کشورهای جهان بوده ایم در ذهن آنها جلوگیری نماید. می توانید از دانش آموزان بخواهید تحقیق هر چند مختصر در مورد زندگی و آثار این دانشمند ایرانی انجام داده و آنرا ارائه دهند.

در ادامه ی این فصل کاربرد قضیه فیثاغورس در حل مسائل مورد توجه قرار دارد. با ارائه ی مسائلی که ضلع مجهول وتر و یا یکی از اضلاع زاویه قائمه باشد و نیز

با ارائه‌ی مسائلی که دانش آموز باید چندین بار رابطه‌ی فیثاغورس را بکار ببرد تا اندازه‌ی ضلع مجهول را بیابد سعی شده تسلط دانش آموز را بر استفاده از این رابطه زیاد نمود و این رابطه به عنوان یکی از ابزارهای کارا در حل برخی مسائل در ذهن دانش آموز تثبیت شود.

توصیه های آموزشی

۱- در فعالیت ها سعی شده است با قطعه قطعه مشخص کردن مربع ها و یا با استفاده از رنگ های مختلف درک چگونگی برابری مساحت های مورد نظر برای دانش آموزان آسان تر شود. با این حال در صورت لزوم با توضیح بیشتر می توانید به ایجاد درک بهتر کمک نمایید.

۲- دانش آموز در محاسبات مسائلی که در آنها از رابطه ی فیثاغورس استفاده می شود ممکن است با جذر اعداد مختلفی مواجه شود. دقت کنید که در این حالات بدست آوردن مقدار عدد بصورت تقریبی که در سال هفتم آموخته اند کافی است و در صورتی که مقدار دقیق را بخواهند می توانند از ماشین حساب استفاده نمایند.

بدهمی های رایج دانش آموزان

برخی دانش آموزان پس از نوشتن رابطه فیثاغورس در جایگذاری اندازه های اضلاع دچار اشتباه می شوند و این مسئله حاکی است که متفاوت بودن نقش وتر در این رابطه بر ایشان مشخص نشده است.

شکل های همپهشت

هدف

- ۱- درک مفهوم همپهستی و قابل انطباق بودن دو چند ضلعی
- ۲- تشخیص اجزای متناظر در دو چند ضلعی همپهشت
- ۳- بداند تبدیل یافته های هر چند ضلعی تحت انتقال، تقارن یا دوران، همواره با آن چندضلعی همپهشت است.
- ۴- مرور و تسلط بیشتر در استفاده از تبدیل های انتقال، تقارن و دوران که در سال هفتم با آنها آشنا شده است.

ابزار مورد نیاز

خط کش

نقاله

گونیا

انواع چند ضلعی ها که با کاغذ درست شده باشد

روش تدریس

در این قسمت اثبات همپهستی دو چند ضلعی خواسته نشده است و آنچه مدنظر می باشد درک مفهوم «همپهستی» و یا «قابل انطباق بودن» شکلها، تشخیص اجزای متناظر در دو شکل همپهشت و بالابردن توان ذهنی دانش آموزان در بکارگیری تبدیل های هندسی جهت تشخیص چگونگی قابل انطباق بودن دو شکل می باشد. فراهم کردن ابزارهایی مناسب از قبل، مثلاً چندضلعی های همپهشت

مقوایی که از قبل آماده کرده اید و نمایش اینکه با مرحله به مرحله استفاده کردن از تبدیلات چگونه دو چندضلعی برهم منطبق می شوند، می تواند کم کم توان ذهنی دانش آموزان را در این زمینه و در تشخیص اجزای متناظر از دو چند ضلعی افزایش دهد. گرچه در کتاب هفتم و نیز در فصل سه (چندضلعی‌ها) دانش آموز با تبدیل‌های انتقال، تقارن و دوران آشنا شده است، با این حال در برخی مسائل استفاده از راه کارهایی که گفته شد و نیز استفاده از کاغذ پوستی و صفحه ی شطرنجی می تواند به یادگیری بیشتر دانش آموزان کمک کند.

حل بعضی از تمرین ها

۱- مثلث های (ب) و (د) و (هـ) و (ر) و (ح) و (ی) و (ک) با توجه به اندازه های اضلاع آنها (که با توجه به صفحه شطرنجی مشخص شده اند) و با توجه به برابری زاویه‌های آنها (که با رنگ های یکسان مشخص شده‌اند) و نیز با توجه به صفحه‌ی شطرنجی، قابل انطباق بودنشان توسط تبدیل ها مشخص می شود.

(الف) ← دوران ← (ر) ← تقارن ← (ح) ← انتقال ← (ی) ← تقارن ← (ک)

۲- در شکل سمت چپ با توجه به دوران گفته شده زوایای E و H بر هم منطبق خواهند شد، I و F بر هم منطبق خواهند شد و دو زاویه G در دو شکل بر هم منطبق خواهند شد لذا داریم:

$$\hat{H} = \hat{E} = 40^\circ$$

$$x + 25 = x - 20 \rightarrow x = 45 \rightarrow G = 70^\circ$$

$$\hat{F} = \hat{I} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$$

توصیه های آموزشی

همانگونه که دیده می شود در این بخش مواردی از شکل های همپهشتی که مثلث نباشند نیز استفاده شده است تا مفهوم تناظر اجزاء دو شکل همپهشت در حالت کلی در ذهن دانش آموز قرار گیرد. شما می توانید به فراخور کلاس خود اشکال مختلف دیگری که همپهشت باشند را مثال زده و برابری های اجزاء متناظر را بررسی کنید. سعی کنید از مثال هایی مانند دو مثلث متساوی الساقین همپهشت و یا دو مثلث متساوی الاضلاع همپهشت، و یا دو چندضلعی منتظم همپهشت که در آنها برابری های اجزاء متناظر بطور یکتا مشخص نمی شود نیز برای آشنایی دانش آموزان با این موارد استفاده کنید.

مثلث های همپهشت

هدف

- ۱- درک اینکه برابری سه زاویه از یک مثلث، نظیر به نظیر، با سه زاویه از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را لزوماً نتیجه نمی دهد.
- ۲- درک اینکه برابری سه ضلع از یک مثلث، نظیر به نظیر، با سه ضلع از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را همواره نتیجه می دهد.
- ۳- درک اینکه برابری اضلاع نظیر به نظیر دو چند ضلعی که مثلث نیستند، لزوماً همپهشتی آنها را نتیجه نمی دهد.
- ۴- درک کند که برابری دو ضلع و زاویه بین از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را ایجاب می کند.

۵- درک کند که برابری دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را ایجاب می کند.

۶- درک اینکه برابری دو ضلع از یک مثلث با هم، برابری دو زاویه از آن مثلث را ایجاب می کند و برعکس.

۷- حالت های همپهشتی مثلث ها را در حل مسائل همپهشتی مثلث ها بکار برد.

ابزار مورد نیاز

انواع مثلث که با کاغذ درست شده است:

خط کش

گونیا

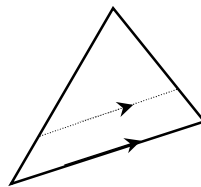
نقاله

روش تدریس

در این بخش درک حالاتی که همپهشتی دو مثلث را می توان نتیجه گرفت و حالاتی که همپهشتی دو مثلث را نمی توان نتیجه گرفت مورد نظر می باشد.

برای حالت سه زاویه که در ابتدا مطرح شده است با استفاده از شکل های کتاب و با درست کردن مثلث های کاغذی که زوایای نظیر به نظیر برابر دارند اما همپهشت نیستند (و یا دو گونیا که هم اندازه نباشند) و با قرار دادن تک تک زاویه های برابر از دو مثلث بر روی هم در سه مرحله، این مطلب که تساوی نظیر به نظیر سه زاویه در دو مثلث همپهشتی آنها را ایجاب نمی کند.

مثال: همواره می توان با رسم پاره خطی موازی یکی از اضلاع مثلث داده شده در درون آن، مثلثی بدست آورد که سه زاویه ی نظیر به نظیر برابر با مثلث داده

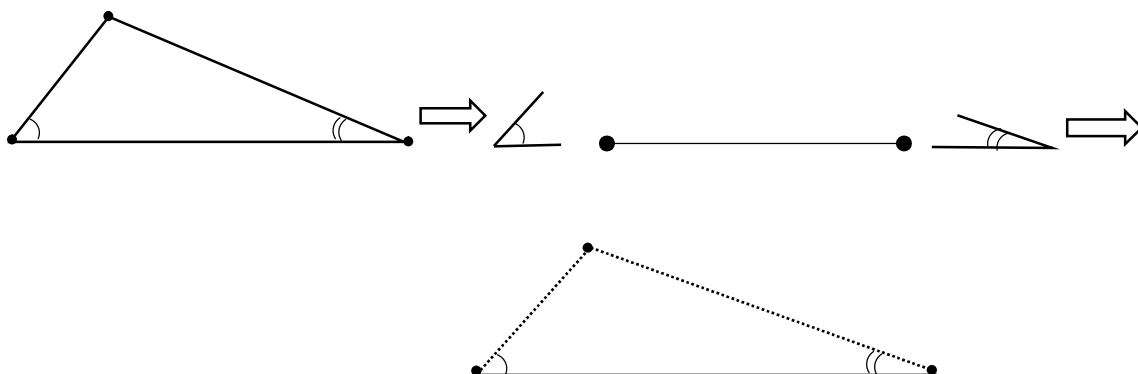


شده داشته باشد اما همنهشت نباشند.

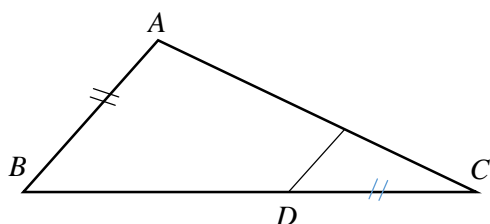
در حالت برابری سه ضلع بهتر است دانش آموز از وسایلی مانند سه عدد نی که هر یک به اندازه ی طول یکی از اضلاع مثلث داده شده ای می باشد استفاده کند و سعی کند با آن سه نی تمام مثلث هایی که می تواند را بسازد تا در این فرایند برایش مشخص شود که در این حالت تنها مثلثی که می تواند بسازد مثلثی است همنهشت با مثلث داده شده.

در کار در کلاس صفحه ی ۹۳ می توانید از دانش آموزان بخواهید پس از مشخص شدن همنهشتی مثلث ها اجزاء متناظر را مشخص کنند تا خواصی دیگر از مثلث متساوی الساقین و لوزی برایشان مشخص شود (مثلاً: میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر قاعده در مثلث متساوی الساقین بر هم منطبق اند و قطر لوزی نیمساز دو زاویه ی آن نیز می باشد).

در فعالیت صفحه ۹۴ حالت دو زاویه و ضلع بین نیز مانند حالات قبلی و با استفاده از شکل های مختلف یا کاغذ پوستی انجام می شود.



حل بعضی از تمرین ها



در تمرین ۳ هدف تأکید بر لزوم این

مطلب است که در حالت دو زاویه و ضلع

بین، ضلع های برابر در دو مثلث باید بین

زاویه های مورد نظر باشد. بعنوان مثالی دیگر می توانید مثلث های زیر را که در

آن BC ضلع بزرگ می باشد در نظر بگیرد و نقطه ی D را روی BC به گونه ای

اختیار کنید که $DC=AB$. حال از نقطه ی D مانند شکل پاره خط DE را موازی AB

رسم کنید. حال در دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle EDC$ زاویه های نظیر به نظیر برابرند و یک

ضلع برابر نیز دارند اما دو مثلث همنهشت نیستند.

توصیه های آموزشی

معمولاً دانش آموزان حالت های همنهشتی مثلث ها را بویژه با استفاده از

مخفف های (ضضض)، (ضض) و (رضز) در ذهن نگاه می دارند و درک چرایی

آن را کم اهمیت می بینند. در این فعالیت ها سعی شده دانش آموز به درک این

مطالب برسد و این کار با انجام فعالیت های کتاب و فعالیت هایی موازی با آن و

صرف وقت و بهره گیری از شکل ها و دست سازه ها و وسایل کمکی امکان پذیر

می باشد.

مثلث قائم الزاویه

هدف:

۱- مثلث قائم الزاویه را بشناسد

۲- اجزاء مثلث قائم الزاویه را بشناسد

۳- لزوم همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه در حالتی که وترهای برابر و یک ضلع زاویه قائمه برابر دارند را درک کند.

۴- لزوم همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه در حالتی که وترهای برابر و یک زاویه برابر دارند را درک کند.

۵- حالت همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه را در حل مسائل همنهشتی مثلث ها بکار ببرد.

۶- دلیل اینکه هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است را درک کند.

۷- دلیل اینکه هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است را درک کند.

ابزار مورد نیاز

انواع مثلث که با کاغذ درست شده است

خط کش

نقاله

گونیا

روش تدریس

همانطور که در فعالیت خواسته شده است دانش آموز با بدست آوردن اندازه ضلع سوم در مثلث ها (از طریق رابطه فیثاغورس) در می یابد که برابری وتر و یک ضلع از دو مثلث، برابری ضلع سوم آنها را نیز ایجاب کرده و لذا دو مثلث به

حالت سه ضلع برابر می شوند و به کافی بودن برابری وتر یک ضلع در دو مثلث قائم الزاویه جهت همپهشتی آن دو مثلث پی می برد.

در فعالیت صفحه ۹۷ ابتدا با توجه به برابری زاویه ای تند از یک مثلث قائم الزاویه با زاویه ای حاده از یک مثلث قائم الزاویه دیگر، برابری زاویه های سوم آنها را نتیجه می گیرد و در این حالت چون وتر همواره بین دو زاویه حاده قرار دارد، همپهشتی دو مثلث را در حالت دو زاویه و ضلع بین نتیجه می گیرد و لذا کافی بودن برابری وتر یک زاویه تند از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای دیگر را برای همپهشتی آن دو مثلث در می یابد.

در فعالیت صفحه ۹۸ دو خاصیت مهم و پرکاربرد، یکی از عمود منصف و دیگری از نیمساز بیان شده اند. در اثبات آنها همانطور که در فعالیت آورده شده است از حالت های همپهشتی مثلث ها که دانش آموز به تازگی آموخته است، جهت تسلط بر استفاده از این روشها، استفاده شده است. در گفتگوی ابتدای فعالیت سعی شده علاوه بر این مفاهیم، مفهوم اثبات و فرق اثبات استنتاجی و اثبات استقرایی و میزان قابل استناد بودن آنها تا حدودی در ذهن دانش آموز جا بگیرد. دانش آموز درک کند که زمانی می توان ادعا کرد هر نقطه از یک خط دارای یک خاصیت مورد نظر می باشد که آن خاصیت برای نقطه ای دلخواه (یک نقطه از آن خط که ویژگی خاصی نسبت به بقیه نقاط نداشته باشد) از آن خط و در حالت کلی اثبات شود.

البته در این فعالیت تا مفهوم مکان هندسی پیش نرفته ایم، یعنی در واقع دانش آموز در پایان این فعالیت می داند که مثلاً هر نقطه ی روی عمود منصف یک

پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است اما نمی داند هر نقطه که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد نیز روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

حل بعضی از تمرین ها

۱- الف) اطلاعات کافی است و دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت اند.

ب) اطلاعات کافی است و دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه تند همنهشت اند.

ج) اطلاعات کافی نیست.

د) اطلاعات کافی نیست.

۳- الف) دوران حول مرکز به اندازه ی زاویه ی 180° .

ب) دوران حول مرکز به اندازه ی زاویه ی 180° .

ج) تقارن نسبت به قطری از دایره که نیمساز زاویه \widehat{AOC} می باشد.

توصیه های آموزشی

در مسائل همنهشتی مانند فعالیت صفحه ۹۸، درک آنکه با توجه به گزاره ی مطرح شده باید بدنبال چه چیز باشیم و چرا مثلث ها را تشکیل دادیم و بدنبال اثبات همنهشتی آنها هستیم، بسیار مهم است. زیرا در عمل دیده شده بسیاری از دانش آموزان نام مفهوم مورد نظر و شکل مربوط به اثبات آنرا بخاطر می سپارند و مثلث ها را تشکیل داده و اثبات را نوشته اند اما لزوم انجام این کار را درک نکرده اند.