

نگاه کلی به فصل دوم

اهداف فصل دوم:

1. آشنایی با مفهوم مجموعه ها
2. آشنایی با مجموعه تهی
3. آشنایی با مفهوم تساوی دو مجموعه
4. آشنایی با مفهوم زیر مجموعه
5. آشنایی با مفهوم اشتراک دو مجموعه
6. آشنایی با مجموعه های جدا از هم
7. آشنایی با مفهوم اجتماع دو مجموعه
8. آشنایی با مفهوم مجموعه های متناهی و نامتناهی
9. آشنایی با نماد زیر مجموعه بودن و نمادهای اعمال اجتماع و اشتراک و تفاضل و مجموعه های اعداد
10. آشنایی با روشهای مشخص کردن و ارائه مجموعه ها
11. به اهمیت نقش مجموعه ها در مدلسازی و حل مسائل روزمره پی ببرند.

اهداف کلی رفتاری و عملکرد مورد انتظار از دانش آموز

دانش آموزان باید بتوانند:

1. مجموعه های کوچک را با استفاده از نماد مجموعه و با اعضایش مشخص کنند.
2. یک مجموعه را با استفاده از نمودار به نمایش درآورند.
3. مجموعه هایی را که اعضای آنها دارای ویژگی مشترکی هستند، از طریق آن ویژگی مشخص کنند.

آموزش فصل دوم

4. با داشتن اعضای یک مجموعه ، در صورت وجود، ویژگی مشترکی برای اعضای آن پیدا کنند.
5. تهی بودن یا نبودن یک مجموعه را بررسی کنند.
6. تساوی دو مجموعه را بررسی کنند.
7. رابطه زیر مجموعه بودن را بین دو مجموعه بررسی کنند.
8. اجتماع دو مجموعه را با مشخص کردن اعضا به دست آورند.
9. از هم جدا بودن دو مجموعه را بررسی کنند.
10. اشتراک دو مجموعه را با مشخص کردن اعضای مشترک پیدا کنند.
11. تفاضل دو مجموعه را به دست آورند.
12. اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه را با نمودارها نمایش دهند.
13. مثال هایی از مجموعه های متناهی و نامتناهی ارائه کنند.
14. روشهای توصیف ریاضی مجموعه ها را برای ارائه مجموعه ها به کار برند.
15. از مجموعه ها در مدلسازی مسائل روزمره استفاده کنند و مسائل خود را حل کنند.

روش آموزشی فصل دوم:

روش تدریس این فصل مبتنی بر حل مسئله است، بنابراین بازنمایی وضعیت در کلاس، با استفاده از نمودار یا از طریق «ایفای نقش» توسط دانش آموزان می تواند در درک بهتر مفهوم کمک کند. مدلسازی مسئله گروه های دانش آموزی به عنوان یک پیش سازمان دهنده آموزشی در نظر گرفته شده است که در آن تمام مفاهیم مورد نظر آموزشی به طور ضمنی گنجانده شده است و در بخشهای مختلف این مفاهیم یکی یکی آشکار می شوند. بنابراین درک مسئله از اهمیت زیادی برخوردار است. به نمایش درآوردن یا بازسازی وضعیتهای مشابه نیز می تواند این نقش را داشته باشد. در هر مرحله سعی کنید با پرسش از دانش آموزان و دریافت پاسخ از طرف دانش آموزان، آن ها را در شرایطی قرار دهید که

آموزش فصل دوم

بتوانند مدل‌سازی مسئله و فرآیند حل آن را در ذهن خود بازسازی کنند، و از این طریق بد فهمی های آن‌ها را نیز شناسایی می‌شود.

فعالیتها به گونه ای طراحی شده اند که می‌توان آن‌ها را فردی اجرا نمود. در صورت تمایل می‌توانید گروه‌های دو نفره تشکیل دهید.

هنگامی که دانش‌آموزان مشغول انجام فعالیت هستند با نظارت بر کار آن‌ها و پرسیدن سؤالاتی به شکل فردی می‌توانید آن‌ها را هدایت کنید یا در صورتی که برخی از دانش‌آموزان زودتر از بقیه فعالیت را به پایان رسانیده باشند، می‌توانید سؤالات اضافی در سطح بالاتر را به آن‌ها بدهید.

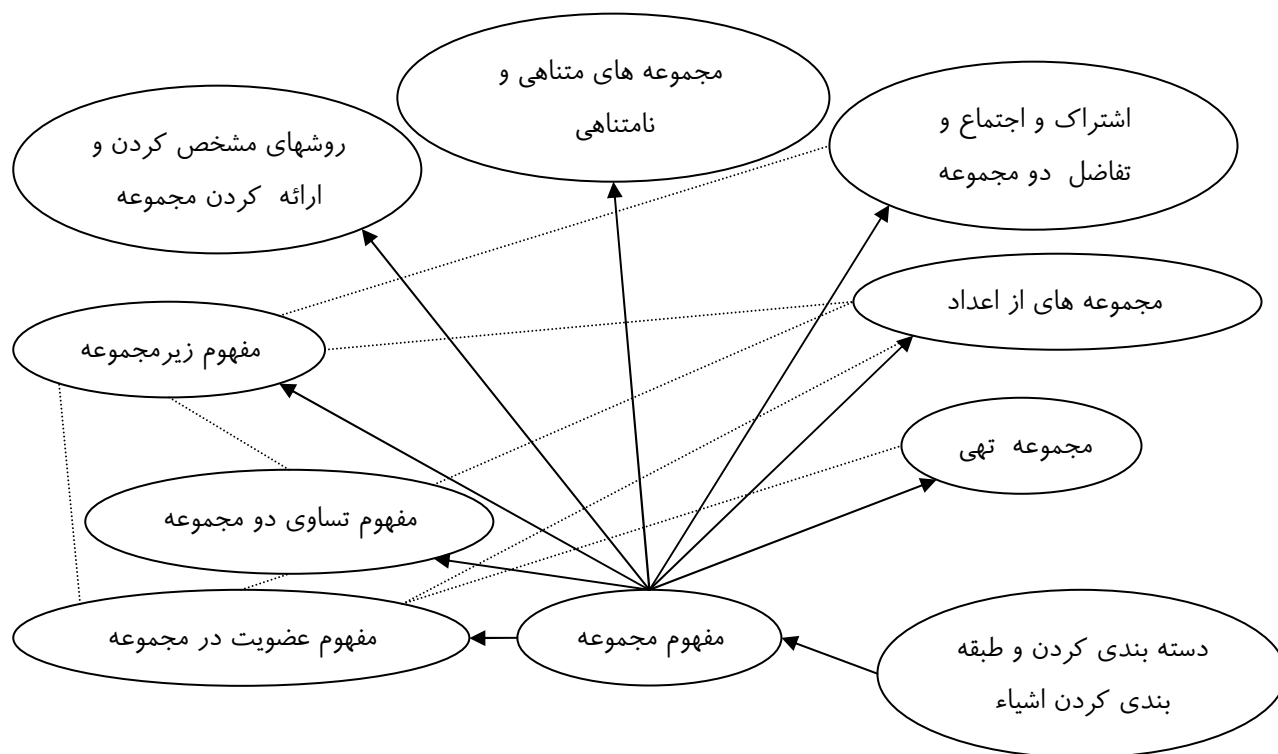
پیشنیازها

- آشنایی نسبی با مفهوم مجموعه، عضویت، و برخی مجموعه‌های عددی خاص مانند Z, N
- آشنایی با شمارش و تعداد دسته‌ای از اشیاء معین

زمانبندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می‌شود این فصل در 1/5 هفته تدریس شود.

نقشه مفهومی فصل دوم



آموزش بخشهای فصل دوم

بخش 1-2 - مسئله گروه های دانش آموزی

اهداف بخش:

- آماده سازی دانش آموزان برای درک مفهوم مجموعه ها و اعمال روی مجموعه ها.
- انجام کار عملی روی مجموعه ها و ساخته شدن مفهوم اعمال روی مجموعه ها به طور غیر مستقیم.

پیشنیازها:

حل معادلات ساده، به نمایش درآوردن مجموعه ها با یک درک شهودی

آموزش فصل دوم واژه ی کلیدی:

تعداد اعضای یک دسته از اشیاء ، اعضای مشترک بین دو دسته از اشیاء

نگاه کلی به بخش:

در دوره راهنمایی، دانش آموزان با مفهوم مجموعه و عضویت آشنایی نسبی پیدا کرده اند. در این فصل سعی می شود تا بر پایه این دانسته ها و ارائه مفاهیم دیگر مرتبط با مجموعه ها نگرشی مثبت در دانش آموزان برای استفاده از این مفهوم در مدلسازی برخی پدیده ها و مسائل با مجموعه ها ایجاد کنیم. به این منظور، این فصل با مدلسازی و حل یک مسئله آشنا شروع می شود. کافی بودن یا نبودن اطلاعات، مرتبط بودن یا نبودن اطلاعات جزئی از فرآیند حل مسئله است و در این بخش به خوبی دیده می شود. ارتباط با معادله و حل معادله موجب تشکیل شبکه ای مرتبط از مفاهیم و مهارتها می شود و درک عمیق تری در دانش آموزان ایجاد می نماید.

در این بخش واژه هایی چون عضو مشترک و تعداد افراد و افراد این گروهها به رویهم، به عنوان واژه تخصصی مجموعه ها استفاده نمی شود بلکه برگرفته از زندگی روزمره و کاربرد آنها است.

ورود به مطلب:

ایجاد انگیزه، در اکثر موارد با طرح یک سوال یا مسئله قابل توجه صورت می گیرد. در اینجا این فصل خود به خود با طرح یک مسئله آغاز شده است و معلم می تواند با همین مسئله و طرح داستان مربوط به آن درس را آغاز کند.

فعالیت آموزشی:

با همراهی کردن با داستان و سعی در حل مسئله مطرح شده در کتاب به طور مستقل، به فعالیتی می رسیم که همان مسئله حل شده در کتاب است که با زبان دیگری و در زمینه دیگری طرح شده است تا دانش آموزان خودشان نیز آن مسئله را مستقلا حل کنند.

فعالیت صفحه 29

بند(1): تعداد دوستان اکبر و احمد روی هم: $142 - 94 = 48$

آموزش فصل دوم

بند(2): دانستن تعداد دوستان اکبر به تنهایی کافی نیست زیرا ممکن است برخی از آن 23 نفر دوست هر دو نفر باشند.

بند(3): اگر چهار نفر دوست مشترک باشند، تعداد دوستان اکبر که دوست احمد نیستند برابر $19 = 23 - 4$ است.

پس تعداد دوستان احمد برابر $29 = 48 - 19$ است.

نکته: در این مسئله این مطلب که آیا اکبر و احمد خودشان با هم دوست هستند یا نه، و این که آیا هر کسی دوست خودش هم محسوب می شود یا نه، تاثیری در حل این مسئله و جواب این مسئله ندارد. در این مسئله دو مجموعه معین در نظر گرفته شده است و اطلاعاتی در مورد این دو مجموعه داده شده است. نکات گفته شده، فقط در مورد چگونگی اعضای این مجموعه ها تاثیر دارد ولی از لحاظ تعداد، طبق اطلاعات مسئله، جواب مسئله به همان صورت که در بالا انجام شد به دست می آید.

ارزیابی یادگیری:

مثال هایی از زندگی روزمره که با مجموعه ها ارتباط دارند (حداکثر دو مجموعه) به دانش آموزان بدهید تا با نمودار مدلسازی کنند. به عنوان مثال فرض کنید A مجموعه دانش آموزان مدرسه باشد که خواهر دارند و B مجموعه دانش آموزان مدرسه باشد که برادر دارند. با دادن تعداد دانش آموزان مدرسه و تعداد دانش آموزانی که فقط خواهر دارند و تعداد دانش آموزانی که فقط برادر دارند، از دانش آموزان بخواهید که تعداد دانش آموزانی که هم خواهر دارند و هم برادر را مشخص کنند. همچنین تعداد دانش آموزانی که خواهر دارند و تعداد دانش آموزانی که برادر دارند را مشخص کنند.

محدوده مطالب:

کار همزمان با سه مجموعه مورد نظر نمی باشد. ارتباط بین تعداد اعضای اجتماع و اشتراک مجموعه ها مورد نظر نمی باشد. از مفهوم تعداد اعضای مجموعه های متناهی فقط به عنوان ابزار برای آموزش استفاده شده است و مسائل مربوط به شمارش تعداد اعضای مجموعهها مورد نظر نمی باشد.

مهارت مدل‌سازی و حل مسئله، ارزیابی کافی بودن یا نبودن اطلاعات در حل مسئله مورد تأکید است.

بخش‌های 2-2 و 3-2 مجموعه‌ها و زیرمجموعه

اهداف بخش

- یادآوری و تعمیق مفهوم مجموعه به عنوان دسته‌ی مشخص شده از اشیاء
- یادآوری مفهوم عضویت و عدم عضویت در مجموعه و نماد آن
- تقویت مهارت در تشخیص اعضای مجموعه
- آشنایی با مجموعه تهی و نماد آن
- آشنایی با مفهوم تساوی دو مجموعه
- آشنایی با مفهوم زیرمجموعه و نماد آن
- مقایسه وضعیت مجموعه اعداد طبیعی، صحیح، گویا و حقیقی از نظر زیر مجموعه یکدیگر بودن

پیش‌نیازها

آشنایی با مفهوم طبقه‌بندی و دسته‌بندی براساس ویژگی

واژه‌های کلیدی

مجموعه، عضویت، تساوی، تهی، زیرمجموعه

در این بخش با اشاره به مسئله گروههای دانش آموزی، مفهوم دسته‌هایی از دانش آموزان که با آنها برخورد شده است، به عنوان مجموعه مطرح می‌شود. سپس مفهوم مجموعه در یک کادر توضیح مختصر داده می‌شود. توجه کنید که مفهوم مجموعه مستقیماً درک می‌شود و در هیچ کجا مفهوم مجموعه از طریق مفاهیم دیگر تعریف نمی‌شود. ما فقط قراردادهایمان را در کار کردن با مجموعه‌ها مشخص می‌کنیم.

این مبحث با ارائه مثالهایی از مجموعه‌های ساده و کوچک و مجموعه‌های عددی و کار روی مفهوم عضویت و عدم عضویت ادامه می‌یابد. مجموعه تهی به عنوان یک مجموعه خاص که عضو ندارد ارائه می‌شود. مفهوم تساوی دو مجموعه از طریق یکسانی اعضای دو مجموعه تعریف می‌شود. از طریق مثال تاکید می‌شود که دو مجموعه ممکن است با روشهای متفاوتی تعریف شده باشند ولی با این حال اعضای یکسانی داشته باشند و با هم مساوی باشند. با استفاده از شیوه تعریف تساوی مجموعه‌ها، از طریق چند مثال توضیح داده می‌شود که تکرار اعضا و ترتیب اعضا، تاثیری در مجموعه ندارد و آن را تغییر نمی‌دهد.

در بخش بعدی وارد مفهوم زیرمجموعه می‌شویم و از طریق یادآوری وضعیت گروههای دانش آموزی نسبت به مجموعه افراد کلاس، مفهوم زیرمجموعه ارائه می‌شود و در مثالهایی این مفهوم تمرین می‌شود.

ورود به مطلب:

این بخش را می‌توان با طرح این سوال آغاز کرد که شناخت مجموعه‌ها چگونه انجام می‌شود و برای شناختن یک مجموعه چه چیزهایی را باید بدانیم. با ایجاد یک مباحثه می‌توانید دانش آموزان را به یک درک صحیح از مجموعه‌ها راهنمایی کنید و مفهوم تساوی مجموعه‌ها را نیز استخراج کنید. برای ورود به مفهوم زیرمجموعه نیز از طریق ارائه مثالهایی جالب توجه رابطه زیرمجموعه را نشان دهید و آن را توسط پیشنهادات دانش آموزان نامگذاری کنید.

پس از ورود به مطلب و تمرین کافی روی چگونگی مشخص شدن مجموعه ها و به کارگیری نمادهای مربوط به عضویت و عدم عضویت به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف آن، ارزیابی درک دانش آموزان از مفهوم عضویت است. حل این تمرین به شکل زیر است.

تمرین در کلاس صفحه 31

$1 \in A$	$1 \notin B$	$1 \notin C$
$2 \in C$	$2 \notin B$	$2 \notin A$
$3 \in A$	$3 \in B$	$3 \notin C$
$4 \in A$	$4 \in B$	$4 \in C$

پس از این تمرین و آموزش مفهوم تساوی و مثالهای آن به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف آن ارزیابی درک دانش آموزان از مفهوم تساوی مجموعه ها است. حل این تمرین به شکل زیر است.

تمرین در کلاس صفحه 32

بند(1): مجموعه معلمین جواد و مجموعه معلمین حسین دو مجموعه مساوی با هم هستند. زیرا همه معلمین جواد معلم حسین و همه معلمین حسین معلم جواد هستند.

بند(2): مجموعه اعداد فرد یک رقمی عبارت است از $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و مجموعه اعداد اول یک رقمی

عبارت است از $B = \{2, 3, 5, 7\}$ پس $A \neq B$

بند(3): این مجموعه عضو ندارد، پس برابر مجموعه تهی است.

در بخش بعدی بعد از آموزش مفهوم زیرمجموعه و مثالهای آن به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف آن، ارزیابی دانسته ها و درک دانش آموزان از مفاهیم عضویت و زیر مجموعه بودن است. حل این تمرین به شکل زیر است.

تمرین در کلاس صفحه 34

بند(1): مثلاً $A = \{a, b, c\}$, یا هر مجموعه سه عضوی دیگر.

آموزش فصل دوم

بند(2): مثلا b را حذف می کنیم و مجموعه $B = \{a, c\}$ را به دست می آوریم. از آنجا که هر عضو B عضو A است داریم $B \subset A$.

بند(3): عنصر جدیدی مانند d در نظر می گیریم و آن را به B اضافه می کنیم. مجموعه جدید به صورت $C = \{a, c, d\}$ خواهد بود. روشن است که B زیرمجموعه C است، $B \subset C$. اما بین A و C لزومی ندارد رابطه زیرمجموعه بودن برقرار شود.

بند(4): بله، دو مجموعه می توانند هر کدام زیرمجموعه دیگری باشند و این فقط در حالتی است که دو مجموعه مساوی باشند.

بند(5): بله، مثلا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 4\}$

بند(6): بله، $N \subset Z$

بند(7): بله، $Z \subset Q$

بند(8): بله، $Q \subset R$

ارزیابی یادگیری:

از دانش آموزان بخواهید:

- مثال هایی از مجموعه هایی را که می شناسند بیان کنند.
- مثال هایی از مجموعه ها بیاورند که نتوان اعضای آن ها را یکی یکی نوشت.
- تساوی مجموعه هایی را که اعضایشان تکرار شده را بررسی کنند.
- مثالهایی از مجموعه های مساوی بیاورند که تعریف آنها متفاوت است.
- زیرمجموعه های مجموعه های کوچک را بنویسند.
- چند مثال از زیرمجموعه های یک مجموعه داده شده ارائه کنند.

مجموعه های پیچیده، و مجموعه هایی که اعضای آنها دوباره مجموعه باشند مورد نظر نمی باشند بررسی تساوی یا زیرمجموعه بودن برای مجموعه هایی که تشخیص اعضای آنها پیچیده باشد مورد نظر نمی باشد. در زیرمجموعه ها مفهوم زیرمجموعه سره بیان نمی شود.

نکات مهم :

توجه کنید که مفهوم تساوی مجموعه ها مهمتر از مفهوم زیرمجموعه است و به همین خاطر زودتر ارائه شده است. لزومی ندارد که حتما تعریف تساوی از طریق مفهوم زیرمجموعه ارائه شود ولی بعد از تعریف زیرمجموعه می توان ارتباط بین آنها را بیان کرد.

توجه داشته باشید که عدم تاثیر تکرار یک شیئی و ترتیب قرارگیری اشیاء در مجموعه ها، مربوط به شیوه تعریف ما از تساوی است و از طریق تعریف تساوی مجموعه ها است که نتیجه می شود تکرار اشیاء و تغییر ترتیب اشیاء تغییری در مجموعه ایجاد نمی کند. در کتاب نیز به همین طریق این نتایج به دست آمده اند.

در تشکیل مجموعه ها، تعریف باید به گونه ای باشد که بتوان بطور قطع مشخص کرد که یک شیء عضو مجموعه می باشد یا نمی باشد. مثال هایی آورده شود که در آن تعریف به گونه ای بیان شود که نتوان یک مجموعه مشخص برای آن نوشت، مثل مجموعه آدم های خوب.

سطح بالاتر :

. در سطح کتاب، تساوی مجموعه ها یا زیرمجموعه بودن با ملاحظه اعضای آنها تشخیص داده می شوند ولی در سطح بالاتر از طریق تعریف و تشخیص ویژگی مشترک اعضا می توان تساوی یا زیرمجموعه بودن را بررسی کرد. دانش آموزان می توانند مجموعه تهی را به عنوان زیر مجموعه همه مجموعه ها بشناسند. مناسب است دانش آموزان قویتر تعداد زیرمجموعه های مجموعه های یک عضوی و دو عضوی و سه عضوی و چهار عضوی را بیابند و سعی در یافتن الگوی در تعداد زیرمجموعه ها کنند و در صورت امکان حدسیه خود را بررسی و اثبات کنند.

سوالات نمونه:

- اگر علی و حسین با یکدیگر پسرعمو باشند، آیا مجموعه پسرعموهای علی با مجموعه پسرعموهای حسین مساوی است؟ چرا؟
- مجموعه اعداد اول بین 10 و 20 را بنویسید. مجموعه اعداد فرد بین 10 و 20 را بنویسید. وضعیت این دو مجموعه نسبت به هم چگونه است؟
- علی و حسین و مجتبی سه همشاگردی هستند که در کلاس اول دبیرستان یک مدرسه تحصیل می کنند. مجموعه افرادی از این کلاس را که نام کوچک آنها سه حرفی است A می نامیم، آیا A ممکن است تهی باشد؟ چرا؟ A حداقل چند عضو دارد؟ آیا A می تواند برابر مجموعه همه افراد کلاس شود؟ چرا؟
- علی و حسین دو همشاگردی هستند که مجموعه نمرات نیم ترم آنها با هم مساوی شده است، اما معدل آنها با هم فرق کرده است. توضیح دهید که چگونه چنین اتفاقی افتاده است.

برای دانش آموزان قویتر:

- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ، $B = \{x^2 + 2, 1, 4\}$ عدد صحیح x را طوری تعیین کنید که B زیرمجموعه A شود.
- مجموعه های $\{0\}$ ، ϕ ، $\{\phi\}$ ، $\{\}$ را در نظر بگیرید، مجموعه های مساوی یکدیگر را مشخص کرده و در مورد علت نامساوی بودن مجموعه های دیگر توضیح دهید.
- اگر $\{1, a^2\} = \{b, b^2\}$ ، a و b چه مقادیری می توانند باشند؟

بخش 2-4 و 2-5 و 2-6 اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه هااهداف بخش

- آشنایی با مفهوم اجتماع دو مجموعه

آموزش فصل دوم

- آشنایی با مفهوم اشتراک دو مجموعه
- آشنایی با مفهوم تفاضل دو مجموعه
- ایجاد مهارت در به دست آوردن اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه
- ایجاد مهارت در استفاده از مفاهیم اجتماع و اشتراک و تفاضل برای مدلسازی مسائل واقعی
- آشنایی با مفهوم مجموعه های جدا از هم

پیش نیازها:

مفهوم مجموعه، عضویت

واژه های کلیدی:

اجتماع مجموعه، اشتراک مجموعه ها، دو مجموعه جدا از هم، تفاضل مجموعه ها

نگاه کلی به بخش ها:

در این بخش ها مفهوم اجتماع و اشتراک و تفاضل بررسی می شوند و با استفاده از نمایش نموداری توضیح داده می شوند. در این مرحله اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه های عددی و غیر عددی متناهی مورد نظر است، برای توسعه و تعمیق مفاهیم می توان این مفاهیم را به مفهوم زیر مجموعه مرتبط نمود. به علاوه در این بخش مفهوم دو مجموعه جدا از هم نیز مورد بررسی قرار می گیرد.

در بخش تفاضل مجموعه ها نیز با طرح یک وضعیت فرضی از دانش آموزان که ویژگی های مختلف دارند به مفهوم تفاضل دو مجموعه پرداخته شده است بنابراین نظیر بخشهای دیگر، این مفهوم در یک بستر واقعی مطرح شده است و سپس مثال هایی از مجموعه های متشکل از نمادها و اعداد ارائه گردیده است، برقراری ارتباط کلامی با نمادها و بیان معنی نمادها با زبان محاوره ای از ویژگی های مثال های ارائه شده در این بخش است.

آموزش فصل دوم

از این مفاهیم بعدها در احتمال و محاسبه $P(A \cup B)$ استفاده خواهد شد. از اجتماع و اشتراک مجموعه ها نیز در تعیین دامنه تعریف توابع استفاده خواهد شد ارائه تمرینهای مناسب در قسمتهای اجتماع و اشتراک مجموعه های عددی پایه ای برای درک بهتر دامنه توابع خواهد بود.

ورود به مطلب:

برای ورود به بخش های اجتماع و اشتراک نظیر آنچه در کتاب عنوان شده است از محیط واقعی و آشنا برای دانش آموزان استفاده کنید و مثال هایی از مجموعه های عددی را مطرح کنید. همچنین با ارجاع به مسئله گروههای دانش آموزی می توانید رخ دادن این عملیات مجموعه ای را در آنجا نشان دهید.

فعالیت آموزشی:

پس از ورود به درس و توضیح مفهوم اجتماع و دیدن مثالهای آن به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف آن ارزیابی درک دانش آموزان از مفهوم اجتماع و رابطه آن با مفهوم زیرمجموعه است. حل این تمرین در کلاس به شکل زیر است.

تمرین در کلاس صفحه 35

$$\text{بند (1): الف: } A \cup A = \{1,5,9\} \cup \{1,5,9\} = \{1,5,9,1,5,9\} = \{1,5,9\} = A$$

$$\text{ب: } B \cup A = \{5,7,9\} \cup \{1,5,9\} = \{5,7,9,1,5,9\} = \{5,7,9,1\} \text{ و } A \cup B = \{1,5,9\} \cup \{5,7,9\} = \{1,5,9,5,7,9\} = \{1,5,9,7\}$$

دیده می شود که دو مجموعه $A \cup B$ و $B \cup A$ اعضای یکسانی دارند و مساویند.

ج) اعضای A اعداد 1,5,7 هستند و این اعداد در $A \cup B$ نیز هستند پس $A \subset A \cup B$. همچنین اعضای B اعداد

5,7,9 هستند و این اعداد در $A \cup B$ نیز هستند پس $B \subset A \cup B$.

بند (2): مثلاً می توانیم قرار دهیم $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. روشن است که $A \subset C$ و $B \subset C$. با مشاهده اعضای

$A \cup B$ نتیجه می شود $A \cup B \subset C$.

بند (3): با بررسی علت درستی روابط بالا و در صورت لزوم ارائه مثالهای دیگر می توان نتیجه گرفت درستی عبارتهای بالا مربوط به مجموعه های خاصی نیست و برای هر مجموعه دیگری هم برقرار است.

در بخش مربوط به اشتراک مجموعه ها نیز پس از توضیح مفهوم و دیدن مثالها به یک تمرین در کلاس می رسیم که هدف آن ارزیابی درک دانش آموزان از مفهوم اشتراک است. با این تمرین می توان توجه دانش آموزان را به این نکات جلب کرد که اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه هر یک از آن مجموعه ها می باشد و اشتراک هر مجموعه با خودش برابر خود آن مجموعه است. حل این تمرین به شکل زیر است.

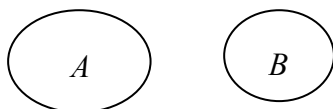
تمرین در کلاس صفحه 37

در این تمرین استفاده از نمودار برای نمایش گزاره ها می تواند کمک خوبی به درک دانش آموزان نماید.

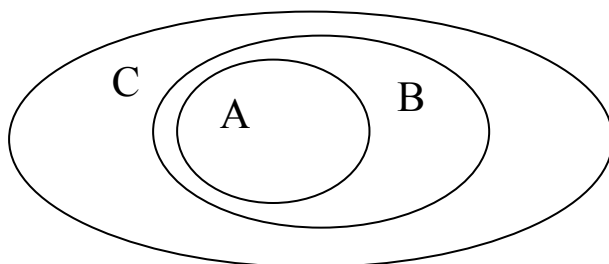
$(A \cap B) \subset A$ صحیح است. $A \cap B = B \cap A$ صحیح است.

$(A \subset A \cap B)$. نادرست است زیرا A اعضای دارد که به $A \cap B$ تعلق ندارد.

$A \subset (A \cup B)$ صحیح است. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ صحیح است. $A \cap A = A$ صحیح است.

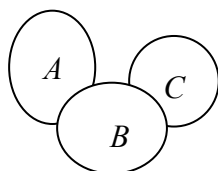


2-الف) $A \cap B = \phi$



ب) $A \subset B \subset C$

ج) $A \cap C = \phi$, $A \cap B \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$



در بخش بعدی پس از آموزش مفهوم تفاضل و دیدن مثالهای آن به مسائل صفحه 39 می رسیم که هدف از آنها تمرین و ارزیابی درک دانش آموزان از مفاهیم اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه ها است.

مسائل (صفحه 39)

مسئله 1) برای حل این مسئله لازم است نقشه ای از ایران را به همراه خود داشته باشید و روی آن از مرکز ایران که تقریباً شهر یزد است دو خط افقی و عمودی رسم کنید و محل قرارگیری شهرها را در شمال و جنوب و شرق تشخیص دهید. البته در سال بعد سعی می شود این نقشه در خود کتاب رسم شود. این مسئله از نقطه نظر برقراری رابطه مفاهیم ریاضی با مفاهیم سایر شاخه های علمی اهمیت دارد.

مسئله 2)

$$\text{الف) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{ب) } A \cap B = \{3, 4, 5\} \quad \text{ج) } A - B = \{1, 2\}$$

$$\text{د) } B - A = \{6\} \quad \text{ه) } (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 6\}$$

$$\text{و) } [(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = \{1, 2, 6\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مسئله 3) $A \cap B$ نظیر دایره قرمز است. $A \cup B$ نظیر دایره آبی است. $B - A$ نظیر ناحیه سبز است.

متناظر با $A - B$ نموداری موجود نیست.

توجه دانش آموزان را به این مطلب جلب کنید که چون $A \subset B$ است پس $A - B$ عضوی ندارد و برابر تهی است.

مسئله 4) در این تمرین اگر هر یک از مرحله ها را جداگانه هاشور بزنید می توانید درک بهتری به دانش آموزان بدهید.

مسئله 5) گزینه $B \cap (A \cup C)$ صحیح است. در این تمرین پس از ارائه پاسخ صحیح، رسم نمودار گزینه های دیگر

می تواند درک بهتری از مجموعه ها در دانش آموزان ایجاد کند.

مسئله 6) دیده می شود $A - B = \{1, 6\}$ و $B \cap C = \{4, 5\}$ پس $(A - B) \cup (B \cap C) = \{4, 5, 1, 6\}$.

آموزش فصل دوم

مسئله 7 $B = \{7, -2, 5\} = \{7, x, -y\} = A$. سه عضو متمایز دارد، پس A نیز سه عضو متمایز باید داشته باشد و x و $-y$ و 7 باید اعداد متمایزی باشند. از آنجا که $x \in A$ داریم $x \in B$ و x باید برابر یکی از اعداد -2 یا 5 باشد. برای $-y$ نیز همین نتیجه را می توان گرفت. پس دو حالت ممکن است رخ دهد $x = -2, y = -5$ یا $x = 5, y = 2$ در هر دو حالت داریم $xy = 10$.

8- هدف از این سؤال آگاهی دانش آموزان از برخی بد فهمی ها و تقویت مهارت دانش آموزان در استدلال است. این دانش آموز تمام اعضای که از دو مجموعه باقی مانده اند را در مجموعه قرار داده است و متوجه این امر نشده است که داریم $(A - B) \subset A$. پاسخ درست $A - B = \{2, 7\}$ است.

9- پاسخ این دانش آموز اشتباه است زیرا هر چهار عدد زوج متوالی دیگری را نیز می توان نوشت. این ویژگی برای مشخص کردن یک مجموعه خاص کافی نیست و این ویژگی اعضای خاصی را مشخص نمی کند.

ارزیابی یادگیری:

با طرح چند مجموعه از محیط واقعی دانش آموزان، از آنان بخواهید اجتماع و اشتراک و تفاضل این مجموعه ها را به دست آورند و نمودارهایی برای توصیف وضعیت این مجموعه ها نسبت به هم رسم کنند . بیان مثال هایی از نوع مثال زیر به عنوان تمرین به دانش آموزان توصیه می شود.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $D = \{2, 3\}$ ، آیا $A \cup B = C$ ؟ چرا؟ آیا

$A \cap B = D$ ؟ چرا؟

محدوده مطالب:

در استفاده از نمادهای اجتماع و اشتراک بیش از دو مجموعه و تا حداکثر چهار مجموعه در محدوده اهداف پیش بینی شده برای دانش آموزان است. از عنوان نمودن اجتماع نامتناهی یا اشتراک نامتناهی از مجموعه ها برای دانش آموزان اجتناب گردد، در شروع مطلب ارائه مثال هایی از محیط واقعی مورد نظر است پس از ارائه مفهوم، استفاده از مجموعه

آموزش فصل دوم

های عددی و کار با علائم ریاضی مورد نظر است خواص جابه جایی و شرکت پذیری اشتراک و اجتماع را در حین ارائه مطالب می توانید برای دانش آموزان مطرح نمایید.

سطح بالاتر:

برای دانش آموزان قوی تر برخی ویژگی های مربوط به مجموعه ها را می توان مطرح نمود نظیر این که:

الف) $A \subset B$, $A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C$

ب) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$, $A \cap B = A$

این ویژگی ها را با استفاده از نمایش نموداری می توان نشان داد. ضمناً می توان از آنها خواست که بررسی کنند برای روابط بالا مثال نقضی وجود دارد یا خیر.

سوالات نمونه:

• سه مجموعه A و B و C را به شکل زیر تعریف می کنیم:

مجموعه همه انسانهایی که می توانند فارسی صحبت کنند $A =$

مجموعه همه انسانهایی که می توانند چینی صحبت کنند $B =$

مجموعه همه انسانهایی که در استرالیا زندگی می کنند $C =$

مجموعه های زیر را به زبان فارسی بیان کنید:

الف) $A \cap B$ ب) $A \cap B \cap C$ ج) $A - B$ د) $(A \cup B) \cap C$

مجموعه هایی که به شکل زیر بیان شده اند از طریق اعمال مجموعه ای روی A و B و C بنویسید.

الف) مجموعه کسانی که استرالیا زندگی می کنند و می توانند فارسی صحبت کنند.

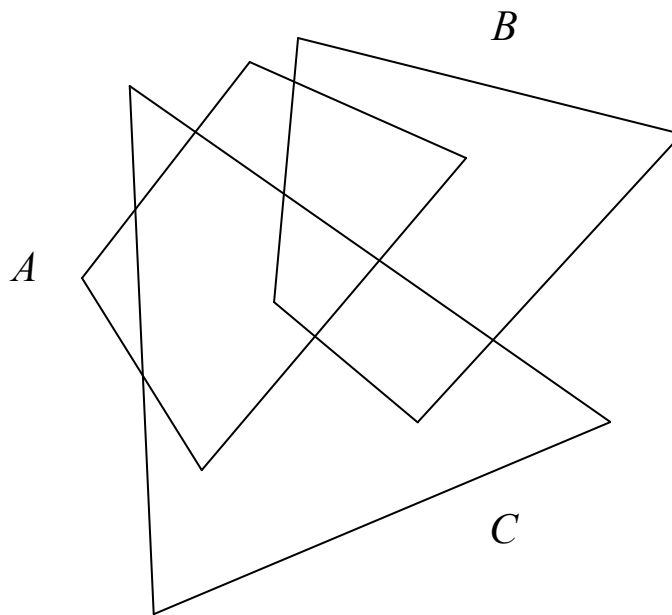
ب) مجموعه کسانی که می توانند فارسی صحبت کنند و در استرالیا زندگی نمی کنند.

ج) مجموعه کسانی که در استرالیا زندگی می کنند و نه فارسی می توانند صحبت کنند و نه چینی.

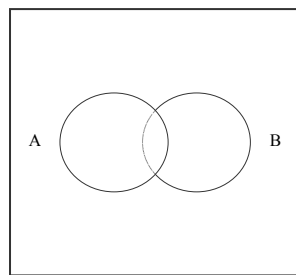
د) مجموعه کسانی که یا فارسی یا چینی می توانند صحبت کنند و در استرالیا زندگی نمی کنند.

سه مجموعه A و B و C به شکل زیر نمایش داده شده اند. مجموعه های زیر را با هاشور زدن مشخص کنید.

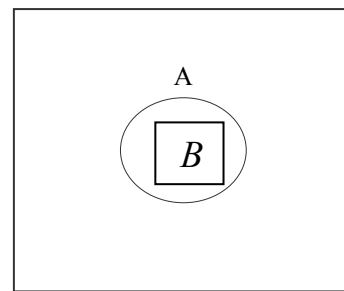
$$A \cup B, \quad A - (B \cup C), \quad (B - C) \cap A, \quad (A \cap C) \cup B, \quad (A \cup B) - C$$



در نمودارهای الف و ب مجموعه های مشخص شده را هاشور بزنید:



نمودار ب



نمودار الف

$$A \cup B(4)$$

$$B - A(3)$$

$$A - B(2)$$

$$A \cap B(1)$$

برای دانش آموزان قویتر:

• اگر $A_1 \subset B$, $A_2 \subset B$ آیا می توان گفت: $A_1 \cup A_2 \subset B$ چرا؟

• اگر $A \subset B_1$, $A \subset B_2$ آیا می توان گفت $A \subset B_1 \cap B_2$ ؟ چرا؟

• اگر $A_i = \left\{ x \mid \frac{1}{i} \leq x < \frac{2}{i}, i \in \mathbb{N} \right\}$ مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ب) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

• از مجموعه S اطلاعات زیر داده شده است. S را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) $S \cap \{3, 5, 8, 11\} = \{5, 8\}$

ب) $S \cup \{4, 5, 11, 13\} = \{4, 5, 7, 11, 13\}$

ج) $\{8, 13\} \subset S$

د) $S \subset \{5, 7, 8, 9, 11, 13\}$

بخش ۲-۷ و ۲-۸ مجموعه های متناهی و نامتناهی و مشخص کردن مجموعه ها

اهداف بخش:

• آشنایی با مفهوم مجموعه های متناهی و نامتناهی

• توانایی تشخیص مجموعه های نامتناهی و متناهی

• توصیف مجموعه ها به صورت های مختلف

• توانایی استفاده از علائم ریاضی برای نمایش مجموعه های عددی

پیش نیازها:

آشنایی با مجموعه های اعداد و علائم ریاضی مانند \in , $<$ و قدر مطلق و مضارب یک عدد

واژه های کلیدی:

مجموعه های متناهی، مجموعه های نامتناهی، ویژگی مشترک اعضای مجموعه

نگاه کلی به بخش:

در این بخش به مجموعه های نامتناهی پرداخته شده است. متناهی بودن یا نبودن یک مجموعه با امکان تعیین تعداد

اعضای آن مشخص می شود. امکان تعیین تعداد به معنای آن است که بتوان آن را با یک عدد مشخص کرد هر چند

در عمل نتوان آن را انجام داد. در مثال مجموعه اتم های موجود در جو، امکان تعیین تعداد اتم ها وجود دارد، هر چند ما در عمل توانایی شمارش اتمها را نداریم. به پایان رسیدن یا نرسیدن شمارش اعضای یک مجموعه شرط اصلی برای مفهوم متناهی یا نامتناهی است. مثال های مشخص فیزیکی هیچکدام نشان دهنده مجموعه های نامتناهی نمی باشد بنابراین برای نشان دادن مجموعه های نامتناهی از مجموعه های اعداد طبیعی و صحیح نامتناهی استفاده شده است. در بخش بعد به شیوه های مشخص نمودن یک مجموعه پرداخته می شود، نمایش مجموعه با نوشتن اعضا و بیان ویژگی مشترک اعضا با علائم ریاضی دو روش اصلی در ارائه مجموعه ها است و اکثر مجموعه های پر کاربرد فقط از این طریقها قابل ارائه هستند. استفاده از این روشها ضروری است و با چند مثال می توان نشان داد که اکثر مجموعه ها را نمی توان با نوشتن یکی یکی اعضای آنها ارائه کرد. روش آموزش این شیوه های ارائه مجموعه ها، ذکر مثال است زیرا در اینجا فقط نوعی از نوشتن ریاضی آموزش داده می شود. آموزش شیوه های نگارش همواره با ارائه مثالهای متنوع در زمینه های متنوع قابل انجام است.

ورود به مطلب:

برای ورود به بحث متناهی و نامتناهی می توان از مفهوم آشنای تعداد اعضا آغاز کرد و در مورد تعداد اعضای مجموعه های مشخص پرسش نمود. رفته رفته با بزرگ کردن این مجموعه ها در حالی که هنوز متناهی هستند مفهوم تعداد اعضا را گسترش دهید اگرچه ممکن است نتوان مقدار دقیق را مشخص کرد و نهایتا مجموعه های نامتناهی را مثال زنید تا دانش آموزان خودشان اعتراف کنند این مجموعه ها را نمی توان شمرد. در اینجا مفهوم نامتناهی را می توان معرفی کرد. برای ورود به بخش **مشخص کردن مجموعه** بهتر است مجموعه هایی نسبتا بزرگی را با اعضای آن ارائه کنید و از دانش آموزان بخواهید این مجموعه را به شکل کوتاهتری معرفی کنند. این عمل با پیدا کردن یک ویژگی مشترک یا تولید اعضا با یک ضابطه معین امکانپذیر است. با ارائه چند نمونه از این گونه مثالها می توانید روش نمایش مجموعه ها را از طریق ویژگی مشترک و تولید اعضا با یک ضابطه آموزش دهید. البته دانش آموزان ممکن است به هر دو این روشها نرسند و معلم باید با راهنمایی های خود دانش آموزان را به این روشها برساند.

پس از ورود به مطلب، آموزش مفاهیم با ذکر چند مثال کامل می شود. در بخش مشخص کردن مجموعه ها ذکر مثال روش آموزش این بخش است تا به مسائل صفحه 43 می رسیم.

مسائل صفحه 43

$$\text{مسئله 1: الف) } A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\} \quad \text{ب) } B = \{-4, 0, 4\} \quad \text{ج) } C = \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$$

$$\text{مسئله 2: الف) } A = \{2^n \mid n \in N\} \quad \text{ب) } B = \{3x \mid x \in N, x < 7\}$$

توجه داشته باشید که پاسخ $B = \{3x \mid x \in Z, 0 < x, x < 7\}$ نیز درست است.

مسئله 3: مجموعه های قسمت «ب» و «ه» متناهی هستند و بقیه نامتناهی هستند.

ارزیابی یادگیری:

با ارائه مثالهای متنوع از مجموعه های گوناگون می توانید توانایی دانش آموزان را در تشخیص متناهی بودن یا نبودن مجموعه ها و درک این مفهوم بسنجید و همچنین با ارائه یک مجموعه از طریق اعضا یا توصیف زبانی، دانش آموزان باید بتوانند توصیفی ریاضی برای آن ارائه دهند و برعکس از طریق توصیف ریاضی یک مجموعه، دانش آموزان باید بتوانند از طریق زبانی آن مجموعه را توصیف کنند و نمونه هایی از اعضای آن را ارائه کنند.

محدوده مطالب:

در ارائه مطالب مربوط به مجموعه های نامتناهی عدد اصلی یا کاردینال مجموعه های نامتناهی و مفاهیمی مانند شمارا و ناشمارا مطرح نیستند و جزو اهداف کتاب نمی باشد.

معرفی مجموعه ها با بیان ویژگی مشترک اعضا در حد نمادهای آشنا برای دانش آموزان قابل طرح است و استفاده از نمادهایی که تاکنون دانش آموزان با آن آشنا نشده اند مجاز نمی باشد. آوردن مثال از مجموعه هایی که در نمایش آنها به صورت ضابطه از نمادهای زیادی استفاده می شود اجتناب گردد.

نکات مهم:

برای زیرمجموعه های اعداد حقیقی مفاهیم کرانداری و بیکرانی تعریف می شوند که نباید آنها را با مفاهیم متناهی و نامتناهی در مجموعه ها مخلوط کنید. این مفاهیم ارتباطی با هم ندارند. مثلا مجموعه اعداد حقیقی بین 0 و 1 به عنوان یک مجموعه نامتناهی است ولی به عنوان زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی کراندار است. کرانداری یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی به معنای آن است که قدرمطلق اعضای آن زیرمجموعه از عدد ثابتی کمتر هستند و این منافاتی با نامتناهی بودن آن زیرمجموعه ندارد.

البته هر زیرمجموعه متناهی از اعداد حقیقی خود به خود کراندار نیز می باشد.

سوالات نمونه

- اعضای مجموعه های زیر را بنویسید:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x^2 \leq 60\}$$

$$B = \left\{ \frac{3x}{2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 10 \right\}$$

$$C = \left\{ \sqrt{x^2 + 2x + 5} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 3 \right\}$$

- مجموعه های زیر را با استفاده از ضابطه مشخص کنید:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$C = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$D = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots \right\}$$

$$E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots \right\}$$

$$F = \{\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \dots, 81\}$$